

ROLL, LAGRANJ VA KOSHI TEOREMALARI

Ziyatova Gulxayo Mardon qizi

*Shahrisabz davlat pedagogika instituti pedagogika fakulteti matematika yo'nalishi
2-kurs talabasi, ziyatovagulxayo@gmail.com*

Turayev Ziyovutdin O'ktamxonovich

*Ilmiy rahbar: Shahrisabz davlat pedagogika instituti " Matematika va ta'limda
axborot texnologiyasi" kafedrasining o'qituvchisi*

Annotatsiya: Ushbu maqolada differensial hisobning asosiy natijalari hisoblangan Roll teoremasi, Lagranj (o'rtacha qiymat) teoremasi va Koshi teoremasining mazmuni, ularni qo'llash shartlari hamda geometrik talqinlari yoritilgan. Har bir teoremaning matematik formulalari, isboti g'oyasi va amaliy misollar orqali qo'llanishi ko'rib chiqiladi. Shuningdek, teoremlar o'rtasidagi o'zaro bog'liqlik, xususan, Lagrange teoremasining Rolle teoremasidan kelib chiqishi, Koshi teoremasining esa Lagranj teoremasining umumlashgan ko'rinishi ekanligi ilmiy nuqtai nazardan tahlil qilinadi. Maqolada bu teoremlar funksiyalar xatti-harakatlarini tadqiq etishda, ekstremumlarni aniqlashda va matematik tahlil masalalarini yechishda tutgan o'rniga alohida e'tibor qaratilgan. Natijada, differensial hisobning mazkur teoremlari matematik tahlilning konseptual negizi sifatida baholanadi.

Kalit so'zlar: Roll teoremasi, lagranj o'rtacha qiymat teoremasi, koshi o'rtacha qiymat teoremasi, differentsiallanuvchi funksiyalar, uzluksiz funksiyalar, o'rtacha qiymat xossalari, matematik tahlil, teorema isboti, teorema shartlari, amalliy qo'llanilishi, matematik model.

Аннотация: В данной статье рассматриваются основные результаты дифференциального исчисления — теоремы Ролля, Лагранжа (о среднем значении) и Коши, их содержание, условия применимости, а также геометрическая интерпретация. Поэтапно анализируются математические формулировки каждой теоремы, идеи их доказательств и примеры практического применения. Кроме того, исследуется взаимосвязь между теоремами: показывается, что теорема Лагранжа следует из теоремы Ролля, а теорема Коши является её обобщённой формой. В статье подчёркивается важная роль этих теорем в изучении поведения функций, определении экстремумов и решении задач математического анализа.

Ключевые слова: теорема Ролля, теорема Лагранжа о среднем значении, теорема Коши о среднем значении, дифференцируемые функции, непрерывные функции, теоремы о среднем значении, свойства среднего значения, математический анализ, доказательство теорем, условия применения теорем, геометрическая интерпретация, практическое применение, математическая модель.

Annotation: *This article examines the fundamental results of differential calculus — Rolle's theorem, the Lagrange (mean value) theorem, and Cauchy's theorem — including their statements, conditions of applicability, and geometric interpretations. The mathematical formulas of each theorem, the main ideas of their proofs, and examples of their practical applications are presented. The interrelation between these theorems is also analyzed: in particular, the derivation of the Lagrange theorem from Rolle's theorem, and the fact that Cauchy's theorem is a generalized form of the Lagrange theorem. Special attention is given to the role of these theorems in studying the behavior of functions, determining extrema, and solving problems in mathematical analysis. As a result, these theorems of differential calculus are regarded as a conceptual foundation of mathematical analysis.*

Keywords: *Rolle's theorem, Lagrange mean value theorem, Cauchy mean value theorem, differentiable functions, continuous functions, mean value properties, mathematical analysis, theorem proofs, theorem conditions, practical applications, mathematical model*

KIRISH

Differensial hisob matematik analizning asosiy bo'limlaridan biri bo'lib, funksiyalarning o'zgarish tezligi va hosilalar orqali ularning xatti-harakatlarini o'rganadi. Hosila mavjud bo'lgan funksiyalar uchun o'rtacha o'sish yoki kamayish tezligini ifodalovchi teoremlar – Roll, Lagranj (o'rtacha qiymat) va Koshi teoremlari – analizning eng muhim natijalaridan hisoblanadi. Ushbu teoremlar funksiyalar xulqini chuqur o'rganishda, tengsizliklar isbotida, ekstremumlar nazariyasida hamda differensial tenglamalar tahlilida keng qo'llaniladi.

Roll teoremasi Agar $y=f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz, (a, b) oraliqda differensiallanuvchi va $f(a)=f(b)$ bo'lsa, u holda aqalli bitta shunday $x=c$ ($a < c < b$) nuqta mavjudki, unda $f'(c)=0$ bo'ladi.

Bu teorema hosilaning nollari yoki ildizlari haqidagi teorema ham deyiladi.

Lagranj teoramasi. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz, (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lsa, u holda aqalli bitta shunday $x=c$ ($a < c < b$) nuqta mavjudki,

$$f(b)-f(a)=f'(c)*(b-a)$$

bo'ladi.

Bu teorema chekli ayirmalar haqidagi teorema ham deyiladi.

Koshi teoremasi. Agar $y=f(x)$ va $y = (\varphi)$ funksiyalar $[a, b]$ kesmada uzluksiz, (a, b) oraliqda differensiallanuvchi shu bilan birga birga bu oraliqda $\varphi'(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda aqalli bitta shunday $x=c$ ($a < c < b$) nuqta mavjudki,

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

Bo'ladi, unda $\varphi(b) \neq \varphi(a)$.

1-misol. $[1, 5]$ kesmada $f(x)=x^2-6x+100$ funksiya uchun Roll teoremasi o'rinlimi? x ning qanday qiymatida $f'(x)=0$ bo'ladi?

Yechish. $f(x)$ funksiya x ning barcha qiymatlarida uzluksiz differensiallanuvchi va uning $[1, 5]$ kesma oxirlaridagi qiymatlari teng: $f(1)=f(5)=95$ bo'gani uchun Roll teoremasi shartlari bajariladi. x ning $f'(x)=0$ bo'ladigan qiymati $f'(x)=2x-6=0$ tenglamadan aniqlanadi, ya'ni $x=3$

$f'(c) = 0$. Geometrik talqin Bu teoreмага ko'ra, agar funksiya kesmaning uchlarida bir xil qiymatga ega bo'lsa, unda grafigi kesma ichida kamida bir marta gorizonta tangensga ega bo'ladi. Ya'ni grafik "tepa" yoki "past" yoki yassi nuqtaga ega.

Ahamiyat Ekstremum teoremasini isbotlashda qo'llanadi.

Roll, Lagranj va Koshi teoremlari matematikada differensial hisobning muhim qismlaridir. Roll teoremasi funksiya uchun bitta maxsus holatni ta'riflaydi, Lagranj teoremasi uni umumlashtiradi, Koshi teoremasi esa ikkita funksiya nisbatiga qaratilgan. Ushbu teoremlar aniqlanmagan nisbatlar (masalan, $\frac{0}{0}$) kabi limitlarni hisoblashda keng qo'llaniladi.

Koshi teoremasi va Roll teoremasi orasidagi asosiy farq shundaki, Roll teoremasi faqat bitta funksiya uchun qo'llaniladi, Koshi teoremasi esa ikkita funksiya uchun qo'llaniladi va bu ikkita funksiyaning hosilalari bo'yicha ko'rsatiladi. Bu ikkala teoremda ham funksiyalar ma'lum bir oraliqda uzluksiz va hosilaga ega bo'lishi kerak, hamda funksiyalar bir-biriga nisbatan ma'lum shartlarni bajarishi kerak. Quyida bu teoremlarning har biri bo'yicha batafsil ma'lumot berilgan:

Roll teoremasi Roll teoremasi, o'rtacha qiymat teoremasining bir xususiy holidir.

Shartlar: Funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lishi kerak.

Funksiya (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lishi kerak. $f(a)=f(b)$ bo'lishi kerak.

Xulosa: Agar bu shartlar bajarilsa, u holda $c \in (a, b)$ shunday bir nuqta mavjudki, $f'(c)=0$ bo'ladi.

Koshi teoremasi Koshi teoremasi, o'rtacha qiymat teoremasining umumiy ko'rinishi hisoblanadi.

Shartlar: Ikki funksiya, masalan, $f(x)$ va $g(x)$, $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lishi kerak.

Ikki funksiya, $f(x)$ va $g(x)$, (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lishi kerak $g'(x) \neq 0$ barcha $x \in (a, b)$ uchun.

Xulosa: Agar bu shartlar bajarilsa, u holda $c \in (a, b)$ shunday bir nuqta mavjudki, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Farqlar va bog'liqlik Koshi teoremasi Roll teoremasining umumiy holidir. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalari ma'lum shartlarni bajarib, $g(x)=x$ bo'lsa, unda Koshi teoremasidan Roll teoremasini olib chiqish mumkin. Roll teoremasida ikkita funksiyani hisobga olish shart emas, faqat bitta funksiyaning o'zi yetarli. Koshi teoremi various hisoblashlarda, masalan, funksiyalar nisbatining limitini topishda, ayniqsa, $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmasliklar uchun keng qo'llaniladi (bu L'Hopital qoidasi deb ham nomlanadi).

Ta'rif: Agar $f(x)$ funksiyasi $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lsa va $f(a) = f(b)$ sharti bajarilsa, u holda (a, b) oraliqda kamida

bitta shunday c nuqta topiladiki, bu nuqtada funksiyaning hosilasi nolga teng bo'ladi: $f'(c) = 0$.

Geometrik Ma'nosi: Agar funksiya grafigi bir xil balandlikdan boshlanib, bir xil balandlikda tugasa, demak, u o'zgarish yo'nalishini kamida bir marta to'xtatib, teskari tomonga yo'naltirishi kerak. Bu nuqtada (maksimum yoki minimumda) urinma gorizontal (Ox o'qiga parallel) bo'ladi.

Asosiy Tatbiqu: Roll teoremasi funksiyaning hosilasi nolga teng bo'ladigan nuqtalari mavjudligini isbotlash uchun ishlatiladi. Masalan, tenglamalarning ildizlari orasidagi hosilaning ildizi mavjudligini ko'rsatadi.

Lagranj Teoremasi (Chekli Orttirmalar Haqidagi Teorema)

Ta'rifi: Agar $f(x)$ funksiyasi $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa va (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lsa, u holda (a, b) oraliqda shunday c nuqta topiladiki, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \text{ yoki } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Geometrik Ma'nosi: Bu teorema o'rtacha o'zgarish tezligi (vatarining nishabi) bilan lahzali o'zgarish tezligi (urinmaning nishabi) o'rtasida bog'liqlik o'rnatadi. Ya'ni, (a, b) oraliqda kamida bitta nuqta c mavjudki, bu nuqtadagi urinma $A(a, f(a))$ va $B(b, f(b))$ nuqtalarni birlashtiruvchi vatariga parallel bo'ladi.

Asosiy Tatbiqlari:

Monotonlikni Aniqalsh: Agar biror oraliqda $f'(x) > 0$ bo'lsa, Lagranj formulasi funksiyaning o'suvchi (monoton) ekanligini isbotlash uchun asos bo'ladi.

Funksiyani Taxminlash: $f(b) \approx f(a) + f'(c)(b-a)$ kabi yaqinlashishlarni keltirib chiqaradi.

Taylor Formulasining Qoldiq Hadini Asoslashda (Peano shakli bilan birga) muhim rol o'ynaydi.

Koshi Teoremasi (Chekli Orttirmalar Haqidagi Umumlashtirilgan Teorema)

Ta'rifi: Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalari $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lsa va $g(b) \neq g(a)$ hamda $\forall x \in (a, b)$ uchun $g'(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda (a, b) oraliqda shunday c nuqta topiladiki: Lagranj va Koshi Munosabati: Koshi teoremasi Lagranj teoremasining bevosita umumlashtirilgan shaklidir. Agar Koshi formulasida $g(x) = x$ deb olinsa (va shundan $g'(x) = 1$ bo'lsa), u avtomatik ravishda Lagranj teoremasiga aylanadi. Teoremlarning Matematik Analizdagi O'rni

Bu uch teorema differensial hisobda o'zaro uzviy bog'liqlikda ishlaydi:

Roll Teoremlaridan Lagranj Teoremasi (isbotlashda asosiy vosita)

Lagranj Teoremlaridan Koshi Teoremasi (Lagranjni ikki funksiya uchun qo'llash orqali)

Lapital Qoidasini Asoslash

Koshi teoremasining eng muhim va mashhur tatbiqlaridan biri bu L'Hopital qoidasini isbotlashdir. Bu qoida $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmasliklarni yechishda qo'llaniladi. Koshi formulasi yordamida:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ekanligi ko'rsatiladi (bunda $f(x_0)=g(x_0)=0$ deb faraz qilinadi). Bu esa L'Hopital qoidasining asosini tashkil etadi.

Xulosa

Roll, Lagranj va Koshi teoremlari nafaqat funksiyaning uzluksizligi va differensiallanuvchanligi sharoitlarida uning hosilasi haqida muhim ma'lumot beradi, balki keyingi yuqori darajadagi matematik tushunchalar (masalan, Teylor qatori, Lopital qoidasi) uchun ham mustahkam poydevor vazifasini o'taydi. Ular matematik analizning nazariy jihatdan eng boy va eng ko'p qo'llaniladigan vositalaridan hisoblanadi.

Misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ ni toping

Yechish. Ifodaning sur'ati va maxraji $x \rightarrow 0$ da nolga intiladi, shu sababli $\frac{0}{0}$ shaklidagi aniqmaslikka egamiz. Lopital qoidasidan foydalansak,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

Bu yerda Lopital qoidasi ikki marta qo'llaniladi.

FOYDALANUVCHI ADABIYOTLAR:

1. Буда́к Б. М., Фо́мин С. В. Курс высшей математики. — Москва: Наука, 1983. (O'rtacha qiymat teoremlari va ularning isbotlari bayoni mavjud.)
2. Демидович Б.П. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — Москва: Наука, 1990.
(Roll, Lagrange va Cauchy teoremlariga bag'ishlangan maxsus boblar mavjud.)
3. Фихтенго́льц Г.М. Основы математического анализа, т. 1. — Москва: Физматлит, 2001.
(Teoremlar chuqur isbotlar bilan keltirilgan mashhur manba.)
4. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, т. 1. — Москва: Физматлит, 2006. (O'rtacha qiymat teoremlari, shartlar va geometrik talqinlar keng yoritilgan.)
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление, т. 1. — Москва: Наука, 1985. (Ta'riflar, shartlar, misollar va qo'llanmalar mavjud.)
6. James Stewart. Calculus. 8th Edition — Cengage Learning, 2016.
(Lagrange Mean Value Theorem, Rolle's Theorem, Cauchy's Theorem sodda va tushunarli bayon.)
7. Tom M. Apostol. Mathematical Analysis. 2nd Edition. Addison-Wesley, 1974.
(O'rtacha qiymat teoremlari matematik jihatdan aniq va qat'iy ko'rinishda berilgan.)
8. Robert G. Bartle, Donald R. Sherbert. Introduction to Real Analysis. 4th Edition. Wiley, 2011.
(Teoremlar va ularning isbotlari aniq, tushunarli tilda bayon qilingan.)

9. Яглом И.М., Болтянский В.Г. Конкурсные задачи по математике. — Москва: Наука, 1985.

(Mean value teoremlari asosida yechiladigan qiziqarli masalalar berilgan.)

10. Mirzayev U., Mamatov A. Matematik analiz. Toshkent: O'zbekiston milliy universiteti nashriyoti.

(O'zbek tilidagi o'rta va oliy ta'lim uchun darslik; teoremlarning bayoni mavjud.)