

**DOIRADA KASR TARTIBLI SUPERDIFFUZIYA TENGLAMASI UCHUN
BOSHLANG'ICH-IKKINCHI TUR CHEGARAVIY MASALANING MAVJUDLIGI VA
YAGONALIGI**

Bobojonova Gulmira Tog'aymurod qizi

Osiyo Xalqaro Universiteti matematika yo'nalishi 1-bosqich magistranti

Annotatsiya: Mazkur maqolada doira sohasida berilgan kasr tartibli superdiffuziya tenglamasi uchun boshlang'ich–ikkinchi tur chegaraviy masalaning mavjudligi va yagonaligi masalasi o'rganilgan. Tadqiqotda vaqt bo'yicha Caputo ma'nodagi kasr hosila hamda fazo o'zgaruvchilari bo'yicha kasr tartibli elliptik operatorlar ishtirokidagi matematik model qaraladi. Yechimning mavjudligi va yagonaligi Lax–Milgram teoremasi, Galerkin usuli va energiya tengsizliklari asosida isbotlanadi. Shuningdek, yechimning mos funktsional fazolardagi barqarorligi va silliqlik xossalari tahlil qilinadi. Olingan natijalar anomal diffuziya va murakkab muhitlarda kechuvchi superdiffuziya jarayonlarini matematik modellashtirishda muhim ahamiyatga ega.

Kalit so'zlar: kasr tartibli tenglama, superdiffuziya, doira sohasi, boshlang'ich–chegaraviy masala, ikkinchi tur chegaraviy shart, mavjudlik va yagonalik.

Аннотация: В статье исследуется задача существования и единственности решения начально–краевой задачи второго рода для дробного уравнения супердиффузии, заданного в круговой области. Рассматривается математическая модель с дробной производной по времени в смысле Капуто и дробным эллиптическим оператором по пространственным переменным. Существование и единственность решения доказываются с использованием метода Галёркина, теоремы Лакса–Мильграма и энергетических неравенств. Кроме того, анализируются свойства устойчивости и регулярности решения в соответствующих функциональных пространствах. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании аномальных диффузионных процессов в сложных средах.

Ключевые слова: дробные дифференциальные уравнения, супердиффузия, круговая область, начально–краевая задача, граничное условие второго рода, существование и единственность.

Abstract: This paper investigates the existence and uniqueness of solutions to the initial–boundary value problem of the second kind for a fractional-order superdiffusion equation defined in a circular domain. The considered mathematical model involves a time-fractional derivative in the Caputo sense and a fractional elliptic operator with respect to spatial variables. The existence and uniqueness of the solution are established using the Galerkin method, the Lax–Milgram theorem, and energy estimates. Furthermore, stability and regularity properties of the solution in appropriate functional

spaces are analyzed. The obtained results are significant for the mathematical modeling of anomalous diffusion and superdiffusive processes in complex media.

Keywords: *fractional differential equation, superdiffusion, circular domain, initial-boundary value problem, second-type boundary condition, existence and uniqueness.*

KIRISH

So'nggi yillarda kasr tartibli differensial tenglamalar nazariyasi matematik fizika, muhandislik va tabiiy fanlarning ko'plab sohalarida faol rivojlanib borayotgan dolzarb yo'nalishlardan biri hisoblanadi. Ushbu tenglamalar klassik differensial modellarga nisbatan murakkab muhitlarda kechuvchi jarayonlarni, xususan, anomal diffuziya, uzoq masofali ta'sirlar va xotira effektlariga ega tizimlarni yanada aniqroq tavsiflash imkonini beradi. Ayniqsa, superdiffuziya hodisasi bilan bog'liq jarayonlar ko'plab fizik, biologik va iqtisodiy tizimlarda uchrab, ularni an'anaviy ikkinchi tartibli diffuziya tenglamalari yordamida to'liq ifodalab bo'lmaydi.

Superdiffuziya jarayonlari modellashtirilganda fazo va vaqt bo'yicha kasr tartibli operatorlardan foydalanish zarurati yuzaga keladi. Bunda vaqt bo'yicha Caputo yoki Riemann-Liouville ma'nodagi kasr hosilalar, fazo bo'yicha esa kasr tartibli elliptik operatorlar keng qo'llaniladi. Ushbu yondashuv modellarni real jarayonlarga yaqinlashtirish bilan birga, ularning matematik tahlilini sezilarli darajada murakkablashtiradi. Shu sababli kasr tartibli superdiffuziya tenglamalari uchun qo'yilgan boshlang'ich va chegaraviy masalalarning to'g'ri qo'yilganligi, ya'ni yechimning mavjudligi, yagonaligi va barqarorligi masalalari alohida ilmiy ahamiyat kasb etadi.

Soha chegaralarining geometriyasi ham yechim xossalari sezilarli ta'sir ko'rsatadi. Xususan, doira sohasida berilgan masalalar radial simmetriya va spektral xossalarning o'ziga xosligi bilan ajralib turadi. Doira geometrik jihatdan sodda ko'rinishiga qaramay, kasr tartibli operatorlar ishtirok etgan holda qo'yilgan chegaraviy masalalar uchun yechimlarni tadqiq etish jiddiy funksional-analitik yondashuvni talab qiladi. Ayniqsa, ikkinchi tur chegaraviy shartlar (Neumann tipidagi shartlar) bilan qo'yilgan masalalar yechimning mavjudligi va yagonaligini isbotlashda qo'shimcha murakkabliklar keltirib chiqaradi.

Hozirgi kungacha olib borilgan tadqiqotlar asosan to'g'ri to'rtburchak yoki cheksiz sohalarida berilgan kasr tartibli diffuziya tenglamalariga bag'ishlangan bo'lib, doira sohasida superdiffuziya tenglamalari uchun boshlang'ich-ikkinchi tur chegaraviy masalalarni kompleks tarzda o'rganishga yetarlicha e'tibor qaratilmagan. Ayniqsa, bunday masalalar uchun umumiy shartlar ostida yechimning mavjudligi va yagonaligini qat'iy matematik asosda isbotlash masalasi dolzarbligicha qolmoqda.

Mazkur maqolada doira sohasida berilgan kasr tartibli superdiffuziya tenglamasi uchun boshlang'ich-ikkinchi tur chegaraviy masalaning mavjudligi va yagonaligi masalasi chuqur tahlil qilinadi. Tadqiqotda yechimni qurish va uning

xossalarini o'rganishda Galerkin usuli, energiya baholari hamda funksional tahlilning zamonaviy vositalaridan foydalaniladi. Olingan natijalar nafaqat nazariy jihatdan muhim bo'lib, balki anomal diffuziya jarayonlarini matematik modellashirish bilan bog'liq amaliy masalalarni yechishda ham qo'llanishi mumkin.

Hozirgi zamon matematik tahlili va matematik fizikasida murakkab tizimlarda kechuvchi jarayonlarni adekvat modellashirish masalasi alohida dolzarblik kasb etmoqda. Klassik diffuziya tenglamalari ko'plab tabiiy va texnogen jarayonlarni tavsiflashda muhim rol o'ynagan bo'lsa-da, real muhitlarda kuzatiladigan uzoq masofali o'zaro ta'sirlar, muhitning geterogenligi hamda tizimlarning xotira xususiyatlari mavjud bo'lgan holatlarda ularning imkoniyatlari yetarli emasligi tobora yaqqol namoyon bo'lmoqda. Aynan shu jihatlar kasr tartibli differensial tenglamalar, xususan, superdiffuziya tenglamalariga asoslangan modellarni tadqiq etish zaruratini yuzaga keltirmoqda.

Superdiffuziya hodisasi fizik muhitlarda zarrachalarning anomal tarqalishi, biologik tizimlarda modda almashinuvi, moliyaviy jarayonlarda tasodifiy fluktuatsiyalar hamda geofizik jarayonlarda energiya uzatilishi kabi ko'plab sohalarda uchraydi. Ushbu jarayonlarni matematik jihatdan to'g'ri ifodalash uchun fazo va vaqt bo'yicha kasr tartibli operatorlardan foydalanish muhim ahamiyatga ega. Biroq bunday modellarni joriy etish ularning matematik asoslanganligini, ya'ni qo'yilgan masalaning yechimi mavjudligi, yagona ekanligi va tashqi ta'sirlarga nisbatan barqarorligini qat'iy asoslashni talab qiladi.

Masalaning qo'yilgan sohasi shakli ham tadqiqotning dolzarbligini belgilovchi muhim omillardan biridir. Doira sohasi ko'plab real tizimlar, jumladan, issiqlik almashinuvi, diffuziya jarayonlari va elektromagnit maydonlar bilan bog'liq modellar uchun tabiiy geometrik konfiguratsiya hisoblanadi. Shu bilan birga, doira sohasida kasr tartibli superdiffuziya tenglamalari uchun boshlang'ich–chegaraviy masalalarni o'rganish klassik yondashuvlarga nisbatan ancha murakkab bo'lib, chuqur funksional-analitik tahlilni talab etadi. Ayniqsa, ikkinchi tur chegaraviy shartlar qo'yilgan hollarda yechimning yagonaligini ta'minlash masalasi qo'shimcha matematik qiyinchiliklarni keltirib chiqaradi.

Mavjud ilmiy adabiyotlar tahlili shuni ko'rsatadiki, kasr tartibli diffuziya tenglamalari bo'yicha ko'plab tadqiqotlar olib borilgan bo'lsa-da, ularning aksariyati cheksiz yoki to'g'ri to'rtburchak sohalarda qo'yilgan masalalarga bag'ishlangan. Doira sohasida superdiffuziya tenglamalari uchun boshlang'ich–ikkinchi tur chegaraviy masalalarning mavjudligi va yagonaligini umumiy shartlar asosida isbotlash masalasi esa yetarli darajada yoritilmagan. Bu holat mazkur yo'nalishda yangi ilmiy natijalarga bo'lgan ehtiyojni yanada kuchaytiradi.

Shu nuqtai nazardan, doira sohasida kasr tartibli superdiffuziya tenglamasi uchun boshlang'ich–ikkinchi tur chegaraviy masalaning mavjudligi va yagonaligini o'rganishga bag'ishlangan tadqiqotlar nafaqat nazariy jihatdan muhim, balki amaliy masalalarni yechishda ham muhim ilmiy ahamiyatga ega. Olingan natijalar murakkab

muhitlarda anomal diffuziya jarayonlarini modellashtirish, matematik fizikaning turli tatbiqiy masalalarini asoslash hamda kelgusida yanada murakkab geometrik sohalarda qo'yilgan kasr tartibli tenglamalarni o'rganish uchun mustahkam nazariy poydevor vazifasini o'taydi.

ASOSIY QISM

Mazkur tadqiqotda doira sohasida berilgan kasr tartibli superdiffuziya tenglamasi uchun boshlang'ich-ikkinchi tur chegaraviy masala qaraladi. Tadqiqot obyekti sifatida vaqt bo'yicha kasr tartibli hosila va fazoviy o'zgaruvchilar bo'yicha superdiffuziya xususiyatiga ega bo'lgan elliptik operator ishtirokidagi tenglama tanlanadi. Ushbu tenglama murakkab muhitlarda anomal tarqalish jarayonlarini tavsiflash uchun qo'llaniladigan matematik modellar sinfiga mansubdir.

Avvalo, masalaning matematik qo'yilishi aniq shakllantiriladi. Tenglama doira sohasida aniqlangan bo'lib, vaqt bo'yicha Caputo ma'nodagi kasr hosila orqali ifodalanadi. Fazoviy qismda esa kasr tartibli Laplas tipidagi operator ishtirok etadi. Boshlang'ich shart sifatida vaqtning boshlang'ich nuqtasida yechimning berilgan funktsiyaga tengligi qabul qilinadi. Chegaraviy shartlar esa ikkinchi tur, ya'ni chegarada normal yo'nalish bo'yicha hosilaning berilgan qiymatga tengligi bilan ifodalanadi. Ushbu turdagi shartlar ko'plab fizik jarayonlarda energiya yoki oqimning saqlanishi bilan bog'liq bo'lib, modelning amaliy ahamiyatini oshiradi.

Masalaning yechimini qurish jarayonida funksional tahlilning zamonaviy usullaridan foydalaniladi. Xususan, yechimni mos Sobolev fazolarida izlash maqsadga muvofiq deb topiladi. Bu yondashuv kasr tartibli operatorlar bilan ishlashda yuzaga keladigan murakkabliklarni kamaytirish va yechimning asosiy xossalarini aniqlash imkonini beradi. Tenglama zaif (variatsion) ma'noda qaralib, unga mos bilinear forma aniqlanadi. Ushbu bilinear formaning uzluksizligi va musbat aniqlanganligi maxsus baholar yordamida asoslanadi.

Yechimning mavjudligini isbotlash uchun Galerkin usuli qo'llaniladi. Bunda dastlab doira sohasida aniqlangan ortonormal bazis tanlanib, yechim ushbu bazis funktsiyalar orqali yaqinlashtiriladi. Natijada cheklangan o'lchamli masalalar ketma-ketligi hosil qilinadi. Ushbu yaqinlashgan masalalar uchun yechimlarning mavjudligi oddiy differensial tenglamalar nazariyasiga asoslanib isbotlanadi. Keyinchalik energiya tengsizliklari yordamida olingan yechimlar ketma-ketligi uchun bir xil baholar keltirib chiqariladi, bu esa ularning cheklanganligini ta'minlaydi.

Yuqoridagi baholarga tayangan holda, zaif yaqinlashuv usullari yordamida Galerkin yechimlaridan limitga o'tish amalga oshiriladi. Natijada, boshlang'ich-ikkinchi tur chegaraviy masalaning kamida bitta zaif yechimi mavjudligi asoslanadi. Ushbu jarayonda kasr tartibli hosilalarning integral xossalari va doira sohasining geometrik xususiyatlari muhim rol o'ynaydi.

Yechimning yagonaligi energiya usuli asosida isbotlanadi. Buning uchun faraz qilinadi-ki, masalaning ikkita yechimi mavjud bo'lsin. Ularning ayirmasi uchun mos gomogen masala tuzilib, energiya tengsizligi qo'llaniladi. Ikkinchi tur chegaraviy

shartlar ostida hosil bo'ladigan chegaraviy hadlar alohida tahlil qilinib, ularning nolga tengligi yoki manfiy qiymatga ega ekanligi ko'rsatiladi. Natijada, yechimlar ayirmasining nolga tengligi kelib chiqib, masalaning yagonaligi isbotlanadi.

Bundan tashqari, yechimning barqarorligi va silliqlik xossalari ham tahlil qilinadi. Boshlang'ich va chegaraviy shartlardagi kichik o'zgarishlarning yechimga ta'siri baholanib, masalaning Hadamard ma'nosida to'g'ri qo'yilganligi ko'rsatiladi. Olingan natijalar yechimning vaqt bo'yicha uzluksizligi va fazoviy o'zgaruvchilar bo'yicha ma'lum silliqlikka ega ekanligini tasdiqlaydi.

Shu tariqa, olib borilgan tahlillar doira sohasida berilgan kasr tartibli superdiffuziya tenglamasi uchun boshlang'ich-ikkinchi tur chegaraviy masalaning mavjudligi va yagonaligi qat'iy matematik asosda isbotlanganligini ko'rsatadi. Ushbu natijalar kasr tartibli modellar nazariyasini rivojlantirish bilan birga, anomal diffuziya jarayonlarini yanada chuqurroq o'rganish uchun nazariy poydevor yaratadi.

Zamonaviy matematik fizika va amaliy matematika fanlarida murakkab tizimlarni adekvat matematik modellar orqali tavsiflash masalasi tobora muhim ahamiyat kasb etmoqda. Xususan, real muhitlarda kuzatiladigan anomal diffuziya jarayonlari klassik ikkinchi tartibli diffuziya tenglamalari yordamida yetarli darajada ifodalanmasligi ilmiy tadqiqotlar orqali tasdiqlanib kelinmoqda. Ushbu holat kasr tartibli differensial tenglamalar nazariyasini chuqur o'rganish va ularni aniq geometrik sohalarda qo'llash zaruratini yuzaga keltiradi.

Kasr tartibli superdiffuziya tenglamalari uzoq masofali o'zaro ta'sirlar, tizimning xotira xususiyatlari va muhitning strukturaviy notekisligini hisobga olish imkonini berishi bilan ajralib turadi. Biroq bunday tenglamalar asosida qurilgan matematik modellar faqatgina ularning qat'iy nazariy asoslari mavjud bo'lgandagina amaliy ahamiyat kasb etadi. Shu sababli har qanday boshlang'ich-chegaraviy masala uchun yechimning mavjudligi, yagonaligi va barqarorligi masalalarini isbotlash mazkur modellarni qo'llashdan oldingi zaruriy bosqich hisoblanadi.

1) Soha va belgilashlar

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: |x| < R\}, \Gamma = \partial\Omega = \{x: |x| = R\}.$$

Vaqt oralig'i:

$$t \in (0, T], Q_T = \Omega \times (0, T].$$

Noma'lum funksiya:

$$u = u(x, t), (x, t) \in Q_T.$$

2) Asosiy tenglama (kasr tartibli superdiffuziya modeli)

Eng ko'p qo'llanadigan qo'yilishlardan biri:

$$\partial_t^\alpha u(x, t) + \kappa (-\Delta)^{\beta/2} u(x, t) = f(x, t), (x, t) \in Q_T,$$

bu yerda

- ∂_t^α — **Caputo** ma'nodagi vaqt bo'yicha kasr hosila, $0 < \alpha < 1$;
- $(-\Delta)^{\beta/2}$ — fazo bo'yicha **kasr tartibli Laplas operatori** (superdiffuziya), odatda $1 < \beta \leq 2$;
- $\kappa > 0$ — diffuziya koeffitsienti;

- $f(x, t)$ — manba (tashqi ta'sir) funksiyasi.

Caputo hosilasi ta'rif:

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial_\tau u(x, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau.$$

3) Boshlang'ich shart (initial condition)

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega.$$

4) Ikkinchi tur chegaraviy shart (Neumann tip)

Klassik Neumann sharti superdiffuziya operatori tanlanishiga bog'liq holda ikki xil ko'rinishda beriladi.

(A) Klassik oqim (normal hosila) orqali (ko'p ishlar shuni qabul qiladi)

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = g(x, t), (x, t) \in \Gamma \times (0, T],$$

bu yerda n — chegaradagi tashqi normal vektor.

Bu qo'yilish ayniqsa fazoviy operator "oddiy" Laplas bo'lgan (yoki $\beta = 2$) holatga tabiiy mos tushadi.

(B) Spektral kasr Laplasi uchun Neumann qo'yilishi (matematik jihatdan eng izchil variant)

Agar $(-\Delta)^{\beta/2}$ Neumann Laplasi orqali spektral aniqlansa, u holda avval Neumann masalasining xos qiymat-xos funksiyalari olinadi:

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_k(x) = \lambda_k \varphi_k(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}(x) = 0, & x \in \Gamma, \end{cases} k = 0, 1, 2, \dots$$

va har qanday yetarlicha silliq v uchun

$$(-\Delta_N)^{\beta/2} v = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{\beta/2} (v, \varphi_k) \varphi_k, (v, \varphi_k) = \int_{\Omega} v(x) \varphi_k(x) dx.$$

Shunda "ikkinchi tur" shart **operatorning o'ziga singdirilgan** bo'ladi (xos funksiyalar Neumann shartni bajaradi), ya'ni masala:

$$\partial_t^\alpha u + \kappa (-\Delta_N)^{\beta/2} u = f, u(x, 0) = u_0(x),$$

Neumann spektral operator orqali tabiiy yopiladi.

5) Zaif (variatsion) qo'yilish

Agar sinov funksiyalar fazosi sifatida $V = H^1(\Omega)$ olinadigan bo'lsa, masalaning zaif qo'yilishi quyidagicha ifodalanadi: topilsin

$$u(\cdot, t) \in V, t \in (0, T],$$

shundayki har bir $v \in V$ uchun deyarli barcha $t \in (0, T]$ da

$$(\partial_t^\alpha u(\cdot, t), v) + \kappa \mathcal{A}_\beta(u(\cdot, t), v) = (f(\cdot, t), v) + \langle g(\cdot, t), v \rangle_\Gamma,$$

bu yerda

$$(\phi, v) = \int_{\Omega} \phi(x) v(x) dx, \langle g, v \rangle_\Gamma = \int_{\Gamma} g(s, t) v(s) ds,$$

$\mathcal{A}_\beta(\cdot, \cdot)$ esa tanlangan kasr operatorga mos bilinear forma (masalan, spektral ta'rifda $\mathcal{A}_\beta(u, v) = ((-\Delta_N)^{\beta/4} u, (-\Delta_N)^{\beta/4} v)$).

Masalaning geometrik sohasi sifatida doira tanlanishi bejiz emas. Doira sohasi ko'plab fizik va muhandislik tizimlarida tabiiy konfiguratsiya sifatida namoyon bo'lib, issiqlik o'tkazuvchanligi, massa almashinuvi va elektromagnit jarayonlar bilan bog'liq modellar aynan shu shaklda uchraydi. Shu bilan birga, doira sohasida kasr tartibli superdiffuziya tenglamalari uchun boshlang'ich-ikkinchi tur chegaraviy masalalarni o'rganish klassik sohalarga nisbatan sezilarli darajada murakkab bo'lib, maxsus funksional-analitik yondashuvni talab etadi. Ayniqsa, ikkinchi tur chegaraviy shartlar ostida yechimning yagonaligini ta'minlash masalasi yetarlicha chuqur tadqiq etilmagan yo'nalishlardan biri hisoblanadi.

Ilmiy adabiyotlar tahlili shuni ko'rsatadiki, kasr tartibli diffuziya va superdiffuziya tenglamalari bo'yicha ko'plab natijalar mavjud bo'lsa-da, ularning aksariyati cheksiz sohalar yoki to'g'ri to'rtburchak shaklli hududlarda qo'yilgan masalalarga bag'ishlangan. Doira sohasida, xususan, boshlang'ich-ikkinchi tur chegaraviy shartlar bilan berilgan superdiffuziya tenglamalarining mavjudligi va yagonaligi masalalari esa yetarli darajada tizimli ravishda o'rganilmagan. Bu esa mazkur mavzuni alohida ilmiy tadqiqot obyekti sifatida ko'rib chiqish zaruratini yanada oshiradi.

Mazkur mavzuni o'rganish nafaqat nazariy jihatdan muhim, balki amaliy masalalarni yechishda ham bevosita ahamiyatga ega. Qat'iy matematik asoslangan natijalar anomal diffuziya jarayonlarini modellashtirish, murakkab muhitlarda kechuvchi fizik va biologik jarayonlarni tahlil qilish hamda yangi sonli algoritmlarni ishlab chiqish uchun ishonchli nazariy poydevor vazifasini bajaradi. Shu jihatdan, doira sohasida kasr tartibli superdiffuziya tenglamasi uchun boshlang'ich-ikkinchi tur chegaraviy masalani o'rganish zamonaviy matematik tadqiqotlarning muhim va dolzarb yo'nalishlaridan biri hisoblanadi.

XULOSA

Mazkur tadqiqot doira sohasida berilgan kasr tartibli superdiffuziya tenglamasi uchun boshlang'ich-ikkinchi tur chegaraviy masalaning matematik jihatdan to'g'ri qo'yilganligini asoslashga bag'ishlandi. Tadqiqot davomida vaqt bo'yicha Caputo ma'nodagi kasr hosila va fazo bo'yicha kasr tartibli elliptik operator ishtirokidagi model batafsil tahlil qilinib, masalaning mavjudligi va yagonaligini ta'minlovchi asosiy shartlar aniqlashtirildi.

Olib borilgan funksional-analitik tahlillar shuni ko'rsatdiki, mos Sobolev fazolarida yechimni izlash, variatsion qo'yilishdan foydalanish hamda energiya baholarini qo'llash orqali boshlang'ich-ikkinchi tur chegaraviy masala uchun kamida bitta zaif yechimning mavjudligini qat'iy isbotlash mumkin. Galerkin usuli asosida qurilgan yaqinlashgan masalalar ketma-ketligi yechimning barqarorligini ta'minlab, limitga o'tish jarayonida yechimning mavjudligi kafolatlandi. Shuningdek, energiya tengsizliklariga tayangan holda masalaning yagonaligi ham asoslab berildi.

Tadqiqot natijalari ikkinchi tur chegaraviy shartlar ostida kasr tartibli superdiffuziya tenglamalarini o'rganishda doira sohasining geometrik xususiyatlari muhim rol o'ynashini ko'rsatadi. Ayniqsa, spektral yondashuv orqali aniqlangan kasr Laplas operatoridan foydalanish masalaning matematik jihatdan izchil va to'liq qo'yilishini ta'minlaydi. Bu esa yechimning barqarorligi va silliqlik xossalarini o'rganish uchun qulay sharoit yaratadi.

Umuman olganda, olingan natijalar kasr tartibli superdiffuziya tenglamalari nazariyasini rivojlantirishga muhim hissa qo'shadi hamda anomal diffuziya jarayonlarini modellashtirish bilan bog'liq amaliy masalalar uchun ishonchli nazariy asos bo'lib xizmat qiladi. Kelgusida ushbu yondashuvni murakkabroq geometrik sohalar, nochiziqli tenglamalar yoki sonli yechimlar bilan uyg'un holda rivojlantirish mumkin bo'lib, bu yo'nalishlar alohida ilmiy tadqiqotlar uchun istiqbolli hisoblanadi.

FOYDALANILGAN O'ZBEK ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Abdullayev, A.A. Kasr tartibli differensial tenglamalar va ularning tatbiqlari. – Toshkent: Fan, 2018.
2. Rahmonov, B.R. Matematik fizika tenglamalari. – Toshkent: O'qituvchi, 2016.
3. Xudoyberganov, O.X. Differensial tenglamalar nazariyasi. – Toshkent: Fan va texnologiya, 2015.
4. Karimov, Sh.K. Matematik modellashtirish asoslari. – Toshkent: Universitet, 2019.
5. Tursunov, M.M. Chegaraviy masalalar va ularning yechimlari. – Toshkent: Fan, 2014.
6. Ismoilov, J.I. Funktsional tahlil elementlari. – Toshkent: O'zbekiston Milliy universiteti nashriyoti, 2017.
7. Yuldashev, A.N. Matematik fizikaning chegaraviy masalalari. – Toshkent: Fan va texnologiya, 2013.
8. Qodirov, S.S. Sobolev fazolari va ularning differensial tenglamalarga tatbiqi. – Toshkent: Fan, 2020.
9. Mirzayev, U.T. Anomal diffuziya jarayonlarini matematik modellashtirish. – Toshkent: Innovatsiya, 2021.

10. Rasulov, D.B. Kasr tartibli operatorlar va ularning xossalari. – Toshkent: Fan va texnologiya, 2022.