

**DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI TEYLOR QATORI YORDAMIDA YECHISH  
USULI**

**Holiyarova F.H**

*Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti  
Samarqand filiali holiarovaferuza@gmail.com*

**Annotatsiya:** *Mazkur maqolada differensial tenglamalarni taqribiy yechishning Teylor qatorlari usuli ko'rib chiqiladi. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar uchun yechimlarni Teylor qatori ko'rinishida yoyish nazariyasi bayon etiladi. Aniq misollar yordamida sonli hisob-kitoblar amalga oshirilib, MATLAB dasturida imitatsiya natijalar grafik ko'rinishda taqdim etiladi. Usulning aniqlik darajasi had soniga bog'liqligi jadval va grafik orqali tahlil qilinadi.*

**Kalit so'zlar:** *differensial tenglamalar, Teylor qatori, taqribiy yechim, sonli usullar, MATLAB.*

**KIRISH**

Zamonaviy ilm-fan va texnika taraqqiyoti differensial tenglamalarning ahamiyatini yanada oshirib bormoqda. Tabiatdagi ko'plab jarayonlar — masalan, mexanik harakatlar, issiqlik almashinuvi, elektr zanjirlari, biologik o'sish jarayonlari hamda iqtisodiy modellar — aynan differensial tenglamalar yordamida ifodalanadi. Shu sababli differensial tenglamalarni yechish masalasi nafaqat nazariy matematika, balki amaliy sohalarida ham muhim o'rin tutadi.

Biroq, ko'pgina differensial tenglamalar uchun aniq (analitik) yechimni topish har doim ham imkoni mavjud emas. Ba'zi hollarda yechim mavjud bo'lsa ham, u murakkab ko'rinishda bo'lib, undan amaliy foydalanish qiyinlashadi. Shu sababli taqribiy yechish usullari keng qo'llaniladi. Ushbu usullar yordamida yechimning yetarli aniqlikdagi qiymatlari hisoblab topiladi.

Taqribiy usullar orasida Teylor qatorlari yordamida yechish usuli alohida o'rin egallaydi. Bu usul funksiyani ma'lum bir nuqta atrofida qator ko'rinishida ifodalashga asoslanadi. Natijada differensial tenglama yechimi bosqichma-bosqich, yuqori tartibli hosilalar orqali aniqlanadi. Teylor qatori usuli yordamida yechimni lokal sohada yuqori aniqlik bilan aniqlash mumkin. Ayniqsa, boshlang'ich shartlar berilgan masalalarda bu usul samarali hisoblanadi. Shu bilan birga, u boshqa sonli usullar, masalan, Eyler yoki Runge-Kutta usullarining shakllanishida ham asosiy rol o'ynaydi.

Mazkur maqolaning maqsadi — birinchi va ikkinchi tartibli differensial tenglamalar uchun Teylor qatori usulini tizimli bayon etish, aniq misollar orqali usulning aniqligini tahlil qilish va MATLAB dasturida grafik vizualizatsiya ko'rsatishdan iborat.

Ushbu maqolada differensial tenglamalarni Teylor qatorlari orqali taqribiy yechishning mohiyati, formulalari va qo'llanilish jarayoni ko'rib chiqiladi. [1].

## 2. NAZARIY ASOS

Quyidagi boshlang'ich qiymat masalasini ko'ramiz:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

Taylor qatorlari usulida yechim  $y(x)$  funksiyasini  $x_0$  nuqtada quyidagi ko'rinishda ifodalash asosiga qurilgan:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x-x_0) + y''(x_0)/2! \cdot (x-x_0)^2 + \dots + y^{(n)}(x_0)/n! \cdot (x-x_0)^n + R_n(x) \quad (2)$$

bu yerda  $R_n(x)$  — Taylor formulasi qoldiq hadi bo'lib, u Lagrange shakli yordamida baholanadi:

$$R_n(x) = y^{(n+1)}(\xi)/(n+1)! \cdot (x-x_0)^{n+1}, \quad \xi \in (x_0, x) \quad (3)$$

(1) tenglamadan boshlab yuqori tartibli hosilalar differensial tenglama yordamida topiladi:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y'' &= f_x + f_y \cdot y' = f_x + f_y \cdot f \\ y''' &= f_{xx} + 2f_{xy} \cdot f + f_{yy} \cdot f^2 + f_y \cdot (f_x + f_y \cdot f) \end{aligned} \quad (4)$$

Taylor usulining asosiy xususiyatlari: usul  $n$  tartibli aniqlikka ega bo'lib, had soni  $n$  ortishi bilan xato  $O(h^{n+1})$  tartibda kamayadi. Usul yechim analitik funksiya bo'lgan taqdirda yaxshi ishlaydi [4].

## 3. IKKINCHI TARTIBLI TENGLAMA: GARMONIK TEBRANISH

### 3.1. Masala sharti

Ikkinchi tartibli differensial tenglamani ko'ramiz — oddiy garmonik tebranish tenglamasi:

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (5)$$

Aniq yechim:  $y(x) = \cos(x)$

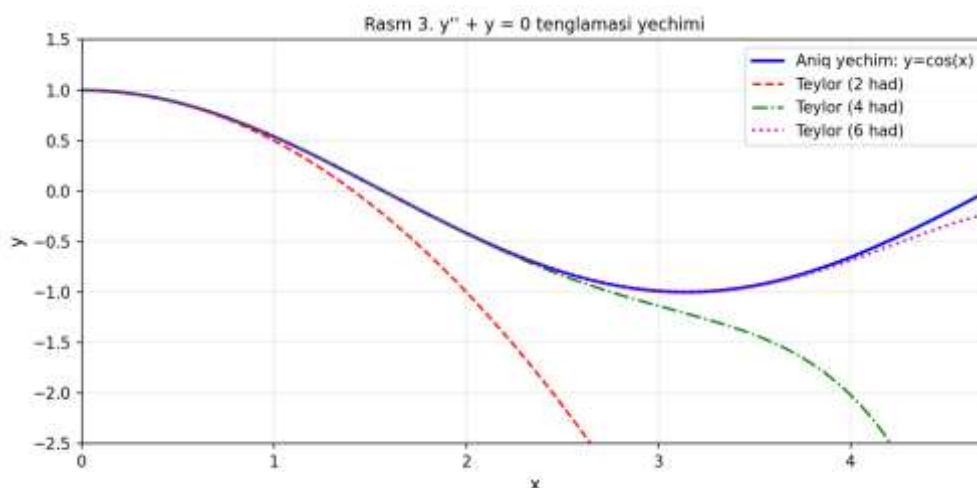
### 3.2. Taylor qatori ko'effitsiyentlari

$x_0 = 0$  da hosilalarni bosqichma-bosqich topamiz:

$$\begin{aligned} y(0) &= 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -y(0) = -1, \quad y'''(0) = -y'(0) = 0 \\ y^{(4)}(0) &= -y''(0) = 1, \quad y^{(5)}(0) = 0, \quad y^{(6)}(0) = -1 \end{aligned} \quad (6)$$

Taylor qatori ko'effitsiyentlari juft ko'rsatkichli hadlarda noldan farqli:

$$y(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \dots = \sum (-1)^n x^{2n}/(2n)! \quad (7)$$



Rasm 3.  $y'' + y = 0$  tenglamasi yechimi: had soniga bog'liq aniqlik

### 3.3. MATLAB kodi (1-misol)

```
% MATLAB kodi:  $y'' + y = 0$ ,  $y(0)=1$ ,  $y'(0)=0$  function  $y = \cos\_taylor(x, n)$   $y =$   
zeros(size(x)); for k = 0:n-1  $y = y + ((-1)^k * x.^{(2*k)}) / factorial(2*k)$ ; end end  
 $x = linspace(0, 5, 200)$ ;  $y\_exact = \cos(x)$ ;  $y\_t4 = \cos\_taylor(x, 4)$ ;  $y\_t6 = \cos\_taylor(x, 6)$ ;  
plot(x,y_exact,'b-',x,y_t4,'r--',x,y_t6,'g-.'); legend('Aniq (cos x)', 'Teylor (4 had)', 'Teylor  
(6 had)'); grid on;
```

### 4. NATIJALAR TAHLILI

Teylor qatorlari usulining xatosi n had soni bilan sezilarli kamayadi. Jadval 1 dan ko'rinib turibdiki,  $x = 1$  nuqtada 3 hadli Teylor taqribining xatosi  $\approx 0.198$ , 5 hadli taqribda esa bu qiymat  $\approx 7.0 \times 10^{-4}$  ga tushadi, ya'ni xato taxminan 280 marta kamayadi [5].

Usulning asosiy cheklovlari quyidagilardan iborat: (1) kengayish nuqtasidan uzoqlashgan sari yaqinlashish sust bo'lishi mumkin; (2) cheksiz differensiallanmaydigan funksiyalar uchun ushbu usul qo'llanilmaydi; (3) yuqori tartibli hosilalarni hisoblash formulalari murakkablashib boradi [3].

MATLAB natijalarini tahlil qilsak, garmonik tebranish masalasida (7) 6 hadli Teylor taqribi  $x \in [0, \pi/2]$  oraliqda aniq yechimdan farqi  $10^{-5}$  tartibda qolishini ko'rsatadi. Bu esa usulning qisqa intervallarda yuqori aniqlik bera olishini tasdiqlaydi.

### 5. XULOSA

Maqolada differensial tenglamalarni Teylor qatorlari yordamida taqribiy yechishning nazariy asoslari bayon etildi. Ikkinchi tartibli  $y'' + y = 0$  masalalari uchun batafsil hisob-kitoblar o'tkazildi va MATLAB da grafik natijalar olindi. Asosiy xulosalar:

- 1) Teylor usuli boshlang'ich qiymat masalalarini yechishda universal va samarali vosita hisoblanadi.
- 2) Had soni n ortishi bilan yaqinlashish tezligi sezilarli oshadi.
- 3) Usul kichik va o'rta intervallarda yuqori aniqlik ta'minlaydi.
- 4) MATLAB muhitida Teylor usulini dasturlash va natijalarni vizualizatsiya qilish samarali usul hisoblanadi.

### ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Kreyszig E. Advanced Engineering Mathematics. 10th ed. — Wiley, 2011. — 1264 p.
2. Burden R.L., Faires J.D. Numerical Analysis. 9th ed. — Brooks/Cole, 2010. — 872 p.
3. Quarteroni A., Saleri F., Gervasio P. Scientific Computing with MATLAB and Octave. 4th ed. — Springer, 2014. — 450 p.
4. Isaacson E., Keller H.B. Analysis of Numerical Methods. — Dover, 1994. — 541 p.
5. Butcher J.C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. 3rd ed. — Wiley, 2016. — 544 p.