

PARAMETRIK FUNKSIYALAR ASOSIDA IKKI O'LCHAMLI NUQTA HARAKATINING KINEMATIK VA DIFFERENSIAL-GEOMETRIK TAHLILI

Ikromov Sunnatillo Nodir o'g'li

*Navoiy davlat konchilik va texnologiyalar universiteti,
Oliy matematika va axborot texnologiyalari kafedrası assistenti*

Annotatsiya. *Mazkur maqolada ikki o'lchamli harakat vektori yordamida ifodalangan nuqtaning trayektoriyasi, tezligi, tezlanishi va egri chiziq bo'ylab harakatlanishidagi egrilik radiusi analitik usulda o'rganiladi. Harakat parametrlari trigonometrik funksiyalar orqali berilgan bo'lib, ularning tahlili asosida trayektoriya shakli ellips ekanligi isbotlanadi. Tezlik va tezlanish vektorlarining komponentalari vaqtga bog'liq holda hosila olish orqali topiladi hamda harakatning bevosita geometriyasi bilan bog'liqligi aniqlanadi.*

Bundan tashqari, trayektoriyaning egrilik radiusi analitik formulalar orqali hisoblab chiqiladi va u orqali nuqtaning harakat yo'nalishidagi egilish darajasi aniqlanadi. O'rganish davomida differensial geometriya va klassik mexanika tamoyillari uyg'un holda qo'llanilib, harakatning kinematik xossalari chuqur yoritiladi. Amaliy ahamiyatga ega bo'lgan bu qarash murakkab harakatlarni tahlil qilishda umumiy metodologik asos sifatida qaralishi mumkin.

Abstract. *This paper presents an analytical study of the motion of a point described by a two-dimensional vector function, focusing on its trajectory, velocity, acceleration, and the radius of curvature along a curved path. The motion parameters are defined using trigonometric functions, and a detailed examination reveals that the trajectory follows an elliptical shape. The components of the velocity and acceleration vectors are derived with respect to time using differentiation, thereby establishing a direct connection between the motion and its geometric structure.*

Moreover, the radius of curvature of the trajectory is computed through analytical expressions, which allows for determining the degree of curvature in the direction of the point's motion. Throughout the investigation, principles from differential geometry and classical mechanics are harmoniously applied to thoroughly explore the kinematic characteristics of the motion. The proposed approach, bearing practical significance, may serve as a general methodological framework for analyzing complex motions.

Kalit so'zlar. *Trayektoriya, tezlik, tezlanish, egrilik radiusi, differensial geometriya, klassik mexanika, trigonometrik funksiyalar, parametrik tenglamalar, kinematika, harakat vektori, analitik usul, harakat parametrlarining tahlili*

Keywords. *Trajectory, velocity, acceleration, radius of curvature, differential geometry, classical mechanics, trigonometric functions, parametric equations, kinematics, motion vector, analytical method, motion parameter analysis*

Mexanikaning asosiy yo'nalishlaridan biri sifatida qaralaydigan nuqta harakati nazariyasi, murakkab kinematik sistemalarning harakatini aniqlash va tahlil qilishda fundamental ahamiyatga ega. Harakatning fazodagi analitik ifodasi -vektorli parametrik tenglamalar ko'rinishida berilganida - bu tenglamalar orqali nuqtaning vaqtdan bog'liq holda fazodagi holati, yo'nalishi, tezligi va tezlanishi aniq belgilanishi mumkin. Ayniqsa,

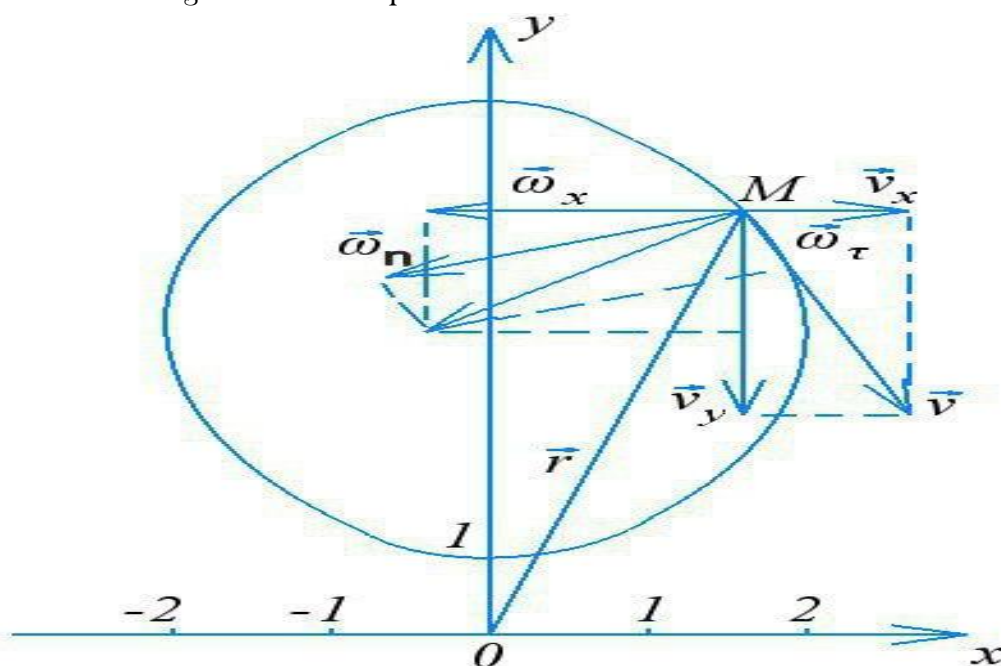
trayektoriyaning shakli, harakat tezligi va tezlanishining tahlili - mexanikaning nafaqat nazariy, balki amaliy masalalarini hal etishda ham hal qiluvchi rol o'ynaydi.

Fazodagi nuqtaning harakati chuqur tahlil qilinadi. Ushbu harakat ikki o'lchamli bo'lib, $x(t)$ va $y(t)$ parametrik funksiyalari orqali ifodalangan. Mazkur parametrik tenglamalar yordamida nuqtaning trayektoriyasi aniqlanadi va bu trayektoriya ellips shaklida ekani isbotlanadi. Elliptik trayektoriya - murakkab harakatlarning tabiiy ifodasi bo'lib, u ko'plab fizik hodisalarda, jumladan, orbital mexanikada, to'liqlar harakatida, va muvozanat holatidan siljishlarda namoyon bo'ladi.

Bundan tashqari, $t = 1$ soniyada nuqtaning tezlik va tezlanish vektorlari aniqlanadi. Tezlik-harakatning birinchi darajali differensial sifatida nuqtaning yo'nalgan harakat tezligini, tezlanish esa-ikkinchi darajali differensial sifatida nuqtaning holat o'zgarish sur'atini ifodalaydi. Ushbu vektorlar komponentalarining analitik ifodasi, ularning yo'nalishi va moduli orqali harakat to'liq tasvirlanadi. Alohida e'tibor trayektoriyaning egrilik radiusini aniqlashga qaratiladi. Bu geometrik kattalik, nuqta trayektoriyasining ma'lum bir nuqtadagi egilganlik darajasini ifodalaydi va u normal tezlanish bilan tezlik orasidagi nisbat orqali aniqlanadi. Ayniqsa, egrilik radiusining hisoblanishi orqali harakatning aylana harakatga qanchalik yaqin yoki uzoqligi haqida aniq tasavvur hosil qilish mumkin. Izlanish davomida mexanikaning klassik qonunlari, matematik analiz usullari (xususan, hosila olish, trigonometrik ayniyatlar, vektor analiz) hamda geometriyaning elementlari uyg'unlashgan holda qo'llaniladi. Bunday yondashuv -harakatni chuqur tahlil qilish va u orqali fizikaviy intuitiv tushunchalarni matematik asoslash imkonini beradi.

Shunday qilib, mazkur ish nafaqat harakat trayektoriyasi, tezlik va tezlanish vektorlarini aniqlashga qaratilgan, balki trayektoriya shakli va egrilik radiusi orqali harakat geometriyasini fizik mazmun bilan boyitishga ham xizmat qiladi.

Masala. Harakati $\vec{r} = 2\sin\frac{\pi t}{3}\vec{i} + \left(3\cos\frac{\pi t}{3} + 4\right)\vec{j}$ tenglama bilan ifodalangan nuqtaning trayektoriyasi va $t = 1$ s paytdagi tezligi, tezlanishi hamda trayektoriyaning shu vaqtda mos keluvchi egrilik radiusi topilsin.



Yechish. $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ifoda bilan nuqta harakati tenglamasini taqqoslab, koordinata usulida harakatini quyidagicha ifodalaymiz:

$$x = 2\sin\frac{\pi t}{3}, \quad y = 3\cos\frac{\pi t}{3} + 4 \quad (1)$$

Bu (1) tenglamalar sistemasi nuqta trayektoriyasining parametrik tenglamalari bo'lib, ulardan vaqt t ni yo'qotsak, trayektoriyaning qanday chiziq bo'lishi aniqlanadi. Buning uchun (1) ni

$$\frac{x}{2} = \sin\frac{\pi t}{3}, \quad \frac{y-4}{3} = \cos\frac{\pi t}{3}$$

ko'rinishda yozib, ularni har birini kvadratga oshirib, hadlab qo'shamiz:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1 \quad (2)$$

(2) dan ko'rinib turibdiki nuqta trayektoriyasi ellips shaklda ekan. (1- rasm).

$t = 1$ sekund vaqtda nuqta trayektoriyasining M nuqtasida bo'ladi.

Nuqta tezligini quyidagi formulalar yordamida topamiz:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}; \quad \cos(\widehat{v\vec{i}}) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\widehat{v\vec{j}}) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\widehat{v\vec{k}}) = \frac{v_z}{v};$$

$$\text{Natijada: } v_x = \dot{x} = \frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi t}{3}, \quad v_y = \dot{y} = -\pi\sin\frac{\pi t}{3};$$

$$v = \pi \sqrt{\frac{4}{9}\cos^2\frac{\pi}{3}t + \sin^2\frac{\pi}{3}t}$$

yoki

$$v = \frac{\pi}{3} \sqrt{4 + 5\sin^2\frac{\pi}{3}t} \quad (3)$$

$t = 1$ sekund vaqt uchun:

$$v_x = \frac{\pi}{3} \approx 1,05 \text{ m/s}, \quad v_y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\pi \approx -2,72 \text{ m/s}; \quad v = \frac{\pi}{6}\sqrt{31} \approx 2,92 \text{ m/s};$$

$$\cos(\widehat{v\vec{i}}) \approx 0,3584, \quad \cos(\widehat{v\vec{j}}) \approx -0,9312.$$

Bu kattaliklarni rasmda tasvirlab, $\vec{v}$ vektori trayektoriyaga M nuqtada o'tkazilgan urunma bo'yicha yo'nalganligiga iqrar bo'lamiz.

Nuqtaning tezlanishini quyidagi formulalar orqali topamiz:

$$\vec{w} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x}, \quad w_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y}, \quad w_z = \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z}$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2 + \dot{v}_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

$$\cos(\widehat{w\vec{i}}) = \frac{w_x}{w}, \quad \cos(\widehat{w\vec{j}}) = \frac{w_y}{w}, \quad \cos(\widehat{w\vec{k}}) = \frac{w_z}{w};$$

$$w_x = -\frac{2\pi^2}{9}\sin\frac{\pi t}{3}, \quad w_y = -\frac{\pi^2}{3}\cos\frac{\pi t}{3};$$

$$w = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{4}{9} \sin^2 \frac{\pi}{3} t + \cos^2 \frac{\pi}{3} t} = \frac{\pi^2}{9} \sqrt{9 - 5 \sin^2 \frac{\pi}{3} t}.$$

$t = 1$ sekund vaqt uchun:

$$w_x \approx -1,9 \text{ m/s}^2, \quad w_y \approx -1,65 \text{ m/s}^2, \quad w_z \approx 2,51 \text{ m/s}^2$$

$$\cos(\widehat{wt}) \approx -0,7570, \quad \cos(\widehat{wz}) \approx -0,6573.$$

Ma'lum masshtab tanlab olib, bu kattaliklarni ham 1-rasmda tasvirlaymiz.

Trayektoriyaning egrilik radiusi aniqlashda $w_n = \frac{v^2}{\rho}$ formuladan foydalanish mumkin.

Buning uchun avval urunma va normal tezlanishlarni topish kerak.

$w_\tau = \frac{dv}{dt}$ bo'lgani uchun (3) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$w_\tau = \dot{v} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\frac{10}{3} \pi \cos \frac{\pi}{3} t \cdot \sin \frac{\pi}{3} t}{2 \sqrt{4 + 5 \sin^2 \frac{\pi}{3} t}} = \frac{5}{18} \pi^2 \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{3} t}{\sqrt{4 + 5 \sin^2 \frac{\pi}{3} t}}.$$

Bunda $w_\tau \approx 0,85 \text{ m/sek}^2$. Urinma tezlanish tezlik vektori bo'yicha yo'nalgan. $w^2 = w_\tau^2 + w_n^2$ formuladan foydalanamiz:

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} \approx 2,36 \text{ m/sek}^2$$

Normal w_τ ga perpendikulyar ravishda perpendikulyar ravishda trayektoriyaning botiq tomoniga yo'nalgan.

Nuqtaning trayektoriyada ravishda egallagan holati uchun egrilik radiusini topamiz:

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} \approx 2,69 \text{ m}.$$

Olingan yechimlar differensial geometriya va klassik mexanika tamoyillari orqali harakatni umumiy nuqtai nazardan yoritishda samarali ekanligini ko'rsatdi.

Parametrik funksiyalar asosida ikki o'lchamli nuqta harakatining kinematik va differensial-geometrik tahlili nafaqat nazariy mexanika uchun, balki amaliy sohalarda ham katta ahamiyatga ega. Harakatning trayektoriyasi, tezligi, tezlanishi va egrilik radiusini aniqlash mexanik tizimlarning dinamik xatti-harakatini tushunish va modellashtirish imkonini beradi.

Ushbu yechim usuli transport vositalarining harakatini loyihalashda, ayniqsa egri yo'llarda xavfsizlik va energiya samaradorligini oshirishda, robototexnika va mexatronika sohasida harakatlarni boshqarishda, shuningdek kosmik apparatlarning orbital trayektoriyalarini aniq nazorat qilishda keng qo'llaniladi. Bundan tashqari, fizika va to'liq mexanikasida ham ushbu metodlar tebranish va rezonans jarayonlarini tahlil qilishda muhim ahamiyatga ega.

Harakat parametrlarining trigonometrik funksiyalar yordamida berilishi, ularning matematik differensial hisoblari nuqtaning harakatining kinematik va geometrik jihatlarini chuqur anglash imkonini yaratdi.

Ellips shaklidagi trayektoriya va uning geometrik xususiyatlari, ayniqsa, egrilik radiusining hisoblanishi orqali harakat yo'nalishidagi egilish darajasi aniqlandi. Tezlik va tezlanish vektorlarining komponentalarini aniqlash va ularni vaqt bo'yicha tahlil qilish

harakatning fizik mazmunini ochib berdi. Bu esa kinematik jarayonlarni yanada tushunishga, ularning mexanik xossalarini matematik jihatdan mustahkanlashga xizmat qildi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. M.M.Mirsaidov, L.I.Boymurodova, N.T.G'iyosova Nazariy mexanika o'quv qo'llanma, "Ilm Ziya", Toshkent-2009, 224 bet.
2. Sh.R.Xurramov Oliy matematika (masalalar to'plami, nazorat topshiriqlari) 3-qism: o'quv qo'llanma, "Fan va texnologiya" Toshkent-2015 - 279 bet.