

TABIIY VA IJTIMOYIY JARAYONLARNI MODELLASHTIRISHDA LIMITLAR
NAZARIYASINING TATBIQI

Ismoilova Zamira Tuxtayevna

*Navoiy davlat konchilik va texnologiyalar universiteti,
Oliy matematika va axborot texnologiyalari kafedrası katta o'qituvchi*

Annotatsiya. *Mazkur maqolada matematikaning rivojlanishida limitlar nazariyasi va unga asoslangan tushunchalar – cheksiz kichik funksiyalar, ularning solishtirilishi, hosilalar, differensiallar va integral tushunchalarining muhim o'ri ilmiy-nazariy hamda amaliy jihatdan tahlil qilinadi. Maqolada tabiiy va texnik fanlarda keng qo'llaniladigan ushbu asosiy matematik vositalar, xususan, cheksiz kichik miqdorlar ustida olib boriladigan tahliliy tadqiqotlar orqali real jarayonlarni matematik modellar asosida chuqur o'rganish imkoniyatlari yoritilgan. Shuningdek, cheksiz kichik funksiyalarni o'zaro solishtirish, ularning nolga intilish tezligini aniqlash, tartiblarini aniqlash hamda ekvivalentligini belgilash orqali funksiyalarning limit xatti-harakatlari tahlil qilinadi. Erkin tushish, hujayra bo'linishi va iqtisodiy o'sish kabi amaliy misollar orqali oniy tezlik tushunchasining fizik, biologik va iqtisodiy jarayonlarni modellashtirishdagi ahamiyati ilmiy va didaktik jihatdan asoslab berilgan. Tadqiqot matematik tahlilning aniqlikni ta'minlash, o'zgaruvchan miqdorlarni sifat va miqdor jihatdan tadqiq qilishdagi rolini, hamda fanlararo integratsiyani kuchaytirishdagi ahamiyatini ko'rsatadi.*

Annotation. *This article provides a theoretical and practical analysis of the significant role of limit theory and its foundational concepts in the development of mathematics, particularly infinitesimal functions, their comparison, derivatives, differentials, and integrals. It elucidates how these fundamental mathematical tools, widely used in natural and technical sciences, enable in-depth study of real-world processes through mathematical models based on analytical research involving infinitesimal quantities. The article further analyzes the limiting behavior of functions by comparing infinitesimal functions, determining their rate of convergence to zero, their orders, and their equivalence. Through practical examples such as free fall, cell division, and economic growth, the importance of the concept of instantaneous velocity in modeling physical, biological, and economic processes is scientifically and didactically substantiated. The research highlights the role of mathematical analysis in ensuring precision, quantitatively and qualitatively investigating changing quantities, and fostering interdisciplinary integration.*

Kalit so'zlar: *Limitlar nazariyasi, cheksiz kichik funksiyalar, hosila, differensial, integral, oniy tezlik, matematik modellashtirish, funksiyalarni solishtirish, ekvivalent cheksiz kichiklar, matematik analiz, uzluksizlik, dinamik jarayonlar, analitik tadqiqot.*

Keywords: *Limit theory, infinitesimal functions, derivative, differential, integral, instantaneous velocity, mathematical modeling, comparison of functions, equivalent infinitesimals, mathematical analysis, continuity, dynamic processes, analytical research.*

Matematikaning rivojlanishida limitlar nazariyasi va unga asoslangan tushunchalar – xususan, cheksiz kichik funksiyalar, ularning solishtirilishi, hosilalar, differensiallar va integral tushunchalari muhim o'rin tutadi. Bu tushunchalar fanning nazariy asoslaridan biri bo'lib,

tabiiy va texnik fanlarda keng qo'llaniladi. Ayniqsa, cheksiz kichik miqdorlar ustida olib boriladigan tahliliy tadqiqotlar orqali real jarayonlarni matematik model asosida chuqur o'rganish imkoniyati yuzaga keladi. Tabiatdagi ko'pgina jarayonlar uzluksiz, lekin notekis xarakterga ega bo'lib, ularni aniq matematik formulalar orqali ifodalashda cheksiz kichik miqdorlar va ularning limitlari muhim metodologik asoslarga ega.

Cheksiz kichik funksiyalarni o'zaro solishtirish, ularning nolga intilish tezligini aniqlash, tartiblarini aniqlash hamda ekvivalentligini aniqlash orqali funktsiyalarning limit xatti-harakatlari tahlil qilinadi. Bunday tahlillar orqali biror matematik jarayonning qanday tezlikda o'zgarayotganini, ya'ni uning oni tezligini, o'zgaruvchanligi yoki barqarorligini matematik ifodalash imkonini beradi. Ayniqsa, fizik va texnikaviy masalalarda moddalarning harakat trayektoriyasini, tezligini, tezlanishini, energiyasini aniqlashda ushbu uslublar beqiyos ahamiyat kasb etadi.

Masalan, erkin tushayotgan moddaning harakat trayektoriyasi va unga tegishli o'tgan yo'lining uzunligi vaqtga bog'liq ravishda qanday o'zgarishini o'rganishda ham, o'zgaruvchanlikni ifodalovchi cheksiz kichiklar orqali aniqlik kiritiladi. Bu yerda harakatning o'rtacha va oniy tezligi orasidagi farqni aniqlash orqali real tizimlarning dinamikasi chuqurroq tushuniladi. Cheksiz kichik funksiyalarning xossalari, ularning ekvivalentligi, yuqori yoki past tartibliligi matematik analizning muhim bo'limlaridan biri bo'lib, ilmiy tahlilning aniqligini belgilaydi.

Shu boisdan, ushbu maqolada cheksiz kichik funksiyalar tushunchasi, ularning o'zaro solishtirilishi, limitlar orqali tahlil qilinishi, oniy tezlikka doir matematik asoslar keng yoritiladi. Ayniqsa, ushbu tushunchalarning amaliyotdagi ahamiyati - masalan, fizik harakatlarning matematik modellashtirilishi orqali aniqlanishi, yoki real hayotdagi harakatlarning oniy holatlarini ifodalashdagi roli, maqolada ilmiy va didaktik jihatdan asoslab beriladi. Bu esa, nafaqat matematika fanining nazariy asoslarini mustahkamlash, balki unga asoslangan boshqa tabiiy fanlar va muhandislik sohalaridagi modellashtirishlarni puxta tashkil etish imkonini beradi.

Zero, hosilalar, cheksiz kichiklar va limitlar haqidagi tushunchalar matematik analiz fanining poydevori bo'lib, o'zgaruvchanlikni tahlil qilishda kuchli vosita hisoblanadi. Bu tushunchalarni mukammal o'zlashtirish orqali zamonaviy ilmiy-tadqiqot metodlarining negizi shakllantiriladi. Shu jihatdan olib qaralganda, cheksiz kichik funksiyalarni tahlil qilish va solishtirishga doir metodologiyalar, matematik tafakkurni rivojlantirish va real masalalarni matematik model asosida yechish ko'nikmalarini shakllantirishda muhim o'rin tutadi.

Cheksiz kichik funksiyalarni solishtirish.

$\alpha(x)$, $\beta(x)$ va $\gamma(x)$ - funksiyalar $x \rightarrow a$ da cheksiz kichik bo'lsin. Bu funksiyalarni mos ravishda α , β va γ kabi belgilash mumkin. Bu cheksiz kichik funksiyalar tezroq kamayishi bo'yicha solishtirish mumkin, ya'ni ularning tezroq nolga intilishini.

Masalan, $f(x) = x^{10}$ funksiyaf(x) = x funksiyaga nisbatan tezroq nolga intiladi.

Ta'rif. Agar $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 0$ bo'lsa, u holda α funksiya β funksiyaga qaraganda *yuqori tartibli cheksiz kichik* deyiladi.

Ta'rif. Agar $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = A$, $A \neq 0$, $A = \text{const}$ bo'lsa, u holda α va β bir xil tartibli cheksiz kichik deyiladi.

Ta'rif. Agar $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 1$ bo'lsa, u holda α va β lar *ekvivalent cheksiz kichik* funksiyalar deyiladi. $\alpha \sim \beta$ kabi yoziladi.

Masalan. $x \rightarrow 0$ bo'lganda $f(x) = x^{10}$ va $f(x) = x$ funksiyalarni solishtiramiz.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{10}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^9 = 0$$

ya'ni $f(x) = x^{10}$ funksiyasi $f(x) = x$ funksiyaga qaraganda yuqori tartibli cheksiz kichik.

Ta'rif. α cheksiz kichik funksiya β ga nisbatan *k tartibli cheksiz kichik* deyiladi, agar $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta^k}$ chekli va noldan farqli bo'lsa.

Barcha cheksiz kichik funksiyalarni ham o'zaro solishtirib bo'lmaydi. Masalan, agar $\frac{\alpha}{\beta}$ nisbat limiti mavjud bo'lmasa.

Misol. Agar $\alpha = x \sin x$, $\beta = x$ bo'lsin, u holda $x \rightarrow 0$ da $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{x^2} = 1$, ya'ni α funksiya β ga nisbatan ikki tartibli cheksiz kichik.

Misol. Agar $\alpha = x \sin \frac{1}{x}$, $\beta = x$ bo'lsin, u holda $x \rightarrow 0$ da $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta}$ mavjud emas, ya'ni α va β funksiyalar taqqoslanmaydi.

Ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar xossalari.

$$1) \alpha \sim \alpha, \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\alpha} = 1 \right)$$

$$2) \text{ Agar } \alpha \sim \beta \text{ va } \beta \sim \gamma, \text{ u holda } \alpha \sim \gamma, \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\gamma} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\gamma} \right) = 1 \cdot 1 = 1 \right)$$

$$3) \text{ Agar } \alpha \sim \beta, \text{ u holda } \beta \sim \alpha, \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} = 1 \right)$$

$$4) \text{ Agar } \alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1 \text{ va } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = k \text{ bo'lsin, u holda } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta_1} = k \text{ yoki } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Natija: a) agar $\alpha \sim \alpha_1$ va $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = k$ bo'lsa, u holda $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta}$

b) agar $\beta \sim \beta_1$ va $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = k$ bo'lsa, u holda $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta_1}$.

Misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x}$ hisoblang.

Ma'lumki $x \rightarrow 0$ da $\operatorname{tg} 5x \sim 5x$ va $\sin 7x \sim 7x$ o'rinli, u holda quyidagi almashtirish bajaramiz:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$$

Oniy tezlik haqidagi masala. Amaliyotda har xil jarayonlarni tekshirishda birinchi navbatda, shu jarayonning kechishi tezligini aniqlash kerak bo'ladi. Tezlikni aniqlash haqidagi masala fan va texnikaning eng asosiy masalalaridan biridir.

Ma'lumki, tekis kechadigan jarayonlarda uning kechishi tezligi o'zgarmasdir. Masalan, tekis harakatda o'tilgan yo'lning shu yo'lni o'tishga ketgan vaqtga nisbati uning tezligini bildirib u o'zgarmasdir.

Lekin tabiatdagi yoki jamiyatdagi ko'pchilik hodisalar notekis kechadigan jarayonlardir. Masalan, og'ir moddiy nuqtaning bo'shliqda og'irlik kuchi ta'sirida erkin tushishi masalasini qaraylik. Fizikadan ma'lumki, bo'shliqda moddiy nuqtaning erkin tushishi qonuni

$$S = \frac{g}{2} t^2 \quad (1)$$

munosabat bilan ifodalanib, bu yerda t erkin tushish boshlanishidan hisoblangan vaqt, S t vaqtda o'tgan yo'l, g erkin tushish tezlanishi, $g \approx 9,81 \text{ m/sek}^2$. Bu harakat notekis bo'lib, uning tezligini topish masalasini qaraymiz.

Vaqtning biror aniq t momenti (oni)ni qaraylik. Bu momentda moddiy nuqta A holatda bo'lsin. OA yo'lning miqdori (1) formula bilan topiladi. Vaqt Δt miqdorga ortsin, ya'ni t , Δt orttirma qabul qiladi. $t + \Delta t$ momentda nuqta B holatda bo'ladi. AB , vaqt Δt orttirma olgandagi yo'l orttirmasi, uni $AB = \Delta S$ bilan belgilaymiz. (1) formulaga $t + \Delta t$ qo'yib,

$$S + \Delta S = \frac{g}{2} (t + \Delta t)^2, \text{ bundan } \Delta S = \frac{g}{2} (t + \Delta t)^2 - \frac{gt^2}{2}$$

yoki

$$\Delta S = \frac{g}{2} (2t\Delta t + \Delta t^2).$$

Oxirgi tenglikni Δt ga bo'lib,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{g}{2} (2t + \Delta t) \quad (2)$$

natijani olamiz. Oxirgi tenglikdan ma'lumki, $\Delta S / \Delta t$ nisbat t va Δt ga bog'liq. Masalan: $\Delta t = 0,1$ sek, $t = 1$ sek bo'lganda,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} - \frac{g}{2} (2 \cdot 1 + 0,1) = 1,05g$$

bo'lib, $t = 3$ sek bo'lganda

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} - \frac{g}{2} (2 \cdot 3 + 0,1) = 3,05g$$

bo'ladi.

Shuning uchun, notekis harakatning tezligi faqat vaqtning aniq momentiga tegishli bo'ladi. Shunday qilib, vaqtning har bir momentidagi oniy tezlik haqida gapirish kerak bo'ladi.

Oniy tezlik tushunchasini qanday aniqlash kerak?

(2) tenglikdan ma'lumki, t o'zgaras bo'lganda, $\Delta S / \Delta t$ A dan B holatgacha oraliqdagi o'rtacha tezlik bo'lib, uni v_{yp} bilan belgilaymiz. Ma'lumki, (2) da Δt qancha kichik bo'lsa, t momentdagi tezlikni shuncha yaxshiroq ifodalaydi. Bundan shunday xulosaga kelamizki, erkin tushayotgan nuqtaning t momentidagi oniy tezligi v ni v_{yp} o'rtacha tezlikning $\Delta t \rightarrow 0$ dagi limiti kabi aniqlaymiz, ya'ni

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{yp}$$

Shunday qilib, oniy tezlikni hisoblash uchun qo'yidagi ko'rinishdagi limitni hisoblash kerak bo'ladi.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad (3)$$

(3) ko'rinishdagi limitni hisoblashga ko'p sondagi amaliy masalalarni yechishda to'g'ri keladi.

Umuman, o'zgaruvchi miqdor o'zgarish tezligini topish masalasi, matematika fanining eng ahamiyatli tushunchalaridan biri - hosila tushunchasiga olib keladi.

Shuning uchun (3) ko'rinishdagi limitlarni hisoblashni umumiy holda qarash zarur bo'ladi.

Avtomobil harakatining oniy tezlikni aniqlash

Masala.

Avtomobil to'g'ri chiziqli yo'nalishda harakat qilmoqda. Uning o'tgan yo'l uzunligi vaqtga bog'liq ravishda quyidagicha berilgan:

$$s(t) = 3t^2 + 2t$$

Avtomobilning 5-soniyada oniy tezligini toping:

Yechilish.

Oniy tezlik bu - yo'lning vaqt bo'yicha hosilasidir.

$$v(t) = s'(t) = \frac{d}{dt}(3t^2 + 2t) = 6t + 2$$

$$v(5) = 6 \cdot 5 + 2 = 32 \text{ m/sek.}$$

Shunday ekan,

$$v(5) = 6 \cdot 5 + 2 = 32 \text{ m/sek.}$$

Javob. Avtomobilning 5-soniyadagi oniy tezligi: 32 m/s.

Masala. (Biologik jarayon - hujayra bo'linishi tezligi).

Bir organizmdagi hujayralar soni vaqtga bog'liq holda quyidagicha oshmoqda:

$$N(t) = \frac{500}{1 + 9e^{-0,6t}}$$

4-soatda hujayralar sonining o'sish tezligini (oni tezlik) aniqlang.

Yechilishi:

Bu -logistik o'sish funksiyasi. Hosilani topamiz:

$$N'(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{500}{1 + 9e^{-0,6t}} \right)$$

$$N'(t) = \frac{500 \cdot (9 \cdot 0,6 \cdot e^{-0,6t})}{(1 + 9 \cdot 0,0907)^2} \approx \frac{245}{(1 + 0,816)^2} \approx 22,5$$

Bu murakkab funksiya bo'lgani uchun quyidagicha yechamiz (zanjir qoidasidan foydalanib):

Endi $t = 4$ bo'lganda:

Javob: 4-soatda hujayralar soni 22.5 ta/s tezlik bilan ortmoqda.

Iqtisodiy o'sish tezligi - foizli yillik o'sish

Bir mamlakat yalpi ichki mahsuloti (YIM) yildan-yilga quyidagi formulaga ko'ra o'smoqda:

5-yildagi iqtisodiy o'sishning oniy tezligini aniqlang.

Yechilishi.

O'sish tezligi bu - YIM funksiyasining vaqt bo'yicha hosilasi:

$$Y'(t) = \frac{d}{dt}(100 \cdot e^{0,05t}) = 100 \cdot e^{0,005t} = 5 \cdot e^{0,005t}$$

Shunda,

$$Y'(t) = 5 \cdot e^{0,25} \approx 5 \cdot 1,284 = 6,42 \text{ mlrd so 'm/yil}$$

Javob. 5-yilda mamlakat iqtisodiy o'sishining oniy tezligi taxminan 6.42 mlrd so'm/yil bo'ladi.

Matematik tahlilning chuqur jihatlaridan biri bu uzluksizlik sharoitida aniqlikni ta'minlash, o'zgaruvchan miqdorlar ustida harakatlanish, ularni sifat va miqdor jihatdan tadqiq qilishdir. Bu borada matematik ifoda vositalaridan biri sifatida aniqlik darajasini nazorat qilish imkonini beruvchi vositalar - funksiyalarning noaniq chegaralardagi xatti-harakatlarini chuqur tahlil qilish uchun ishlab chiqilgan nazariy apparatlar muhim rol o'ynaydi. Bu yo'nalishda ko'rib chiqilgan matematik modellar, o'zgarishlar dinamikasini aniqlovchi formulalar, funksiyalarning xulqini tahlil qilish imkonini beruvchi yondashuvlar - barchasi real tizimlarni mukammal tushunishda asosiy kalit vazifasini bajaradi.

Bunda, vaqt yoki boshqa biror parametrga bog'liq ravishda o'zgaruvchi miqdorlar tahliliga asoslangan uslublar orqali murakkab tabiat hodisalari, texnik tizimlar va ijtimoiy-iqtisodiy o'zgarishlar chuqur va aniq modellashtiriladi. Bu usullar orqali faqat nazariy jihatdan emas, balki real hayotda kuzatiladigan jarayonlarning o'zgarish sur'atini aniqlash, ularni bashorat qilish, takomillashtirish va boshqarish imkoniyatlari kengaytiriladi. Bu esa, fanlararo integratsiyaning yuqori bosqichda amalga oshirilishiga xizmat qiladi.

Qayd etilgan masalalar doirasida keltirilgan matematik modellar orqali vaqtga bog'liq jarayonlarning chuqur xatti-harakatini tasvirlash, ularning mahalliy o'zgaruvchanligini aniqlash, o'rta va oniy qiymatlarni matematik nuqtai nazardan ajratib ko'rsatish imkoniyati yuzaga keladi. Ayniqsa, avtomobil harakatining zamon bilan bog'liq ifodasi, iqtisodiy ko'rsatkichlarning eksponensial shakldagi rivojlanishi, hamda biologik tizimlardagi o'sish jarayonining logistik model orqali tahlil qilinishi - ushbu nazariy metodologiya amaliy jihatdan naqadar keng ko'lamlı va moslashuvchan ekanligini namoyon etadi.

Shuningdek, matematik formulalarning bu turdagi qo'llanilishi natijasida har qanday tizimda kechayotgan o'zgarishlarning qaysi mezonlar asosida tezroq yoki sekinroq sodir bo'lishi, qanday sharoitlarda ularning muvozanatga kelishi yoki beqaror holatga o'tishi mumkinligi aniq matematik mezonlar bilan tahlil qilinadi. Bu esa, ilmiy asoslangan qarorlar qabul qilishda va tizimlarni optimallashtirishda muhim vosita bo'lib xizmat qiladi.

O'z navbatida, bu nazariy yechimlar orqali turli sohaga oid ilmiy muammolar matematik modellar asosida soddalashtirilgan ko'rinishda berilib, ularning yechimlari umumlashtiriladi. Bu yondashuv orqali, fanlararo bog'liqlikni kuchaytirish, ilmiy qarashlarni aniqlashtirish va amaliy masalalarni hal qilishdagi samaradorlik oshiriladi.

Xulosa sifatida aytish mumkinki, matematik modellashtirish, tahlil va solishtirish asosida o'zgaruvchan hodisalarning murakkab mohiyatini ochib beruvchi nazariy vositalar nafaqat matematikani rivojlantiradi, balki uni texnika, fizika, biologiya, iqtisodiyot, tibbiyot kabi sohalarga muvaffaqiyatli integratsiyalash imkonini ham yaratadi. Ular orqali ilmiy tahlil chuqurlashadi, qaror qabul qilish sifati oshadi va real tizimlar ustida nazorat kuchayadi. Shu sababli, ushbu yo'nalishdagi nazariy asoslar va amaliy qo'llanmalar keyingi tadqiqotlar uchun tayanch bo'lib, fan va texnikaning uzluksiz rivojlanishiga poydevor bo'lib xizmat qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

3. Sh.R.Xurramov Oliy matematika (masalalar to'plami, nazorat topshiriqlari) 1-qism: o'quv qo'llanma, "Fan va texnologiya" Toshkent-2015 - 408 bet.

4. Karimov E., Meliboyev A., Islomov B. Oliy matematika. 1-qism. Toshkent: "Fan va texnologiya", 2016. – 432 bet