

REAL JARAYONLARDA LIMIT VA HOSILA TUSHUNCHALARINI AMALIY
TATBIQINI TAHLIL QILISH USULLARI

Abdullayeva Dildora Anvarovna

*Navoiy davlat konchilik va texnologiyalar universiteti,
Oliy matematika va axborot texnologiyalari kafedrası katta o'qituvchi*

Annotatsiya. *Mazkur maqolada matematik analizning asosiy tushunchalaridan biri - limit va undan hosil bo'luvchi hosila va urinma tushunchalarining nazariy hamda amaliy ahamiyati yoritilgan. Tadqiqot davomida bu tushunchalarning zamonaviy fan va texnologiyalarda - xususan, muhandislik, informatika, fizika, biologiya va iqtisodiyot kabi sohalarda real jarayonlarni modellashtirishdagi roli chuqur tahlil qilinadi. Egri chiziqqa urinmaning geometrik va analitik ta'rif orqali limit tushunchasining mohiyati ochib beriladi va bu orqali o'zgaruvchan jarayonlarning (harakat tezligi, oqim zichligi, o'sish sur'atlari) matematik ifodalanishi asoslab beriladi.*

Maqolada keltirilgan turli fanlar kesimidagi masalalar elektr toki kuchining oniy qiymati, bakteriyalar sonining o'sish tezligi, sterjen zichligi, aholi sonining yillik o'zgarishi hamda neft oqimi misolida limit va hosilaning amaliy tatbiqi ko'rsatib berilgan. Shu orqali matematik yondashuvlar yordamida fizik va ijtimoiy jarayonlarni tahlil qilish, optimallashtirish va bashoratlash imkoniyatlari ilmiy asosda yoritilgan.

Annotation. *This article explores one of the fundamental concepts of mathematical analysis the limit along with its derivative notions such as the derivative itself and the tangent line, highlighting both their theoretical foundations and practical significance. The research provides a thorough analysis of how these concepts are applied in modern science and technology, particularly in fields such as engineering, computer science, physics, biology, and economics, to model real-world processes.*

Through the geometric and analytical interpretation of the tangent to a curve, the essence of the limit concept is explained, offering a mathematical framework for analyzing variable processes such as velocity, flow density, and growth rates. The article presents practical problems across various scientific disciplines – including instantaneous electric current, bacterial growth rate, rod density, annual population change, and oil flow rate - demonstrating the real-life applications of limits and derivatives.

Kalit so'zlar: *limit, hosila, urinma, matematik analiz, real jarayonlar, modellashtirish, tezlik, zichlik, o'sish sur'ati, geometrik ta'rif, analitik yondashuv, fanlararo integratsiya, amaliy matematika, muhandislik hisoblari, matematik modellashtirish*

Keywords: *limit, derivative, tangent, mathematical analysis, real processes, modeling, velocity, density, growth rate, geometric definition, analytical approach, interdisciplinary integration, applied mathematics, engineering calculations, mathematical modeling.*

Bugungi ilm-fan taraqqiyoti, texnika va texnologiyalarning keskin rivojlanishi sharoitida aniq fanlar, xususan, oliy matematika fani zamonaviy muhandislik, texnologiya, iqtisodiyot, tibbiyot, biologiya, informatika va boshqa ko'plab sohalarda asosiy nazariy vositalardan biri sifatida e'tirof etilmoqda. Jumladan, funksiyalarni tahlil qilish, limitlar nazariyasi, hosila

tushunchasi va ularni amaliyotga tadbiq etish zamonaviy muhandislik hisoblarining ajralmas qismi hisoblanadi. Oliy matematikaning bu boblari yordamida fizikaviy jarayonlarni modellashtirish, texnologik qurilmalarni loyihalash, biologik o'sish jarayonlarini tahlil qilish, iqtisodiy prognozlar berish va ko'plab boshqa real masalalarni hal qilish imkonini beradi.

Ayniqsa, funksiyaning limitini topish va uning hosilasini aniqlash orqali harakat tezligi, o'zgaruvchan o'lchamlar, oqimlar, zichliklar, tok kuchi, o'sish tezliklari kabi real hayotiy kattaliklarni baholash mumkin. Bu matematik yondashuv fizik, texnik va ijtimoiy jarayonlarni chuqur tahlil qilish, optimallashtirish va nazorat qilishga imkon beradi. Urinma va kesuvchi tushunchalari esa ushbu jarayonlarning geometriyaviy va analitik asoslarini tashkil qiladi.

Matematik analizning asosiy tushunchalaridan biri - bu limit bo'lib, u orqali uzluksizlik, hosila va integral tushunchalari aniqlanadi. Limit nazariyasi yordamida funksiyaning ma'lum bir nuqtadagi xatti-harakatini aniqlash, ya'ni u shu nuqtada qanday qiymatga yaqinlashishini tushunish mumkin bo'ladi. Masalan, egri chiziqqa urinma tushunchasi limitga asoslanadi. Agar egri chiziqdagi biror nuqtaga yaqinlashayotgan kesuvchi chiziq mavjud bo'lsa, u holda bu kesuvchi urinmaga aylanadi va uning burchak koeffitsienti funksiyaning hosilasi bilan aniqlanadi.

Boshqacha aytganda, egri chiziqqa urinma - bu kesuvchi chiziqning limit holati bo'lib, bu geometriya bilan bog'liq muhim tushuncha hisoblanadi. Urinma burchagining tangensi (ya'ni burchak koeffitsienti) funksiyaning shu nuqtadagi hosilasini bildiradi. Bu ko'rinishdagi limitlar va hosilalarni hisoblash muhandislik, tabiiy va ijtimoiy fanlarda keng qo'llaniladi. Masalan:

1. Fizikada: tok kuchining oniy qiymatini topish;
2. Kimyo va biologiyada: reaksiyalar tezligi yoki organizmlar sonining o'sish tezligini aniqlash;
3. Mexanikada: sterjen yoki jismlarning zichligini aniqlash;
4. Iqtisodiyotda: aholi sonining o'sish sur'ati yoki ishlab chiqarish hajmidagi o'zgarishni aniqlashda.

Hosilaning fizik mazmuni harakat tezligi, oqim tezligi, o'zgarish intensivligi kabi tushunchalar bilan chambarchas bog'liq. Shuning uchun ham hosila faqat nazariy matematika tushunchasi bo'lib qolmay, amaliy muhandislik va ilmiy hisob-kitoblarning ajralmas qismidir. Ayniqsa, dinamik jarayonlar, ya'ni vaqtga bog'liq o'zgarishlarni ifodalovchi modellar uchun hosila fundamental ahamiyat kasb etadi.

Quyidagi maqolada urinma tushunchasi, uning limit orqali hosil bo'lishi va burchak koeffitsientini hisoblash usullari batafsil tahlil qilinadi. Shuningdek, limit va hosila tushunchalariga asoslangan bir nechta real hayotiy masalalar yechilib, ularning matematik asoslari va fizik mazmuni keng yoritiladi. Keltirilgan misollar orqali o'quvchilar va tadqiqotchilar matematik nazariyaning hayotdagi qo'llanilishi va foydasini chuqur anglab yetish imkoniga ega bo'ladilar.

Shu jihatdan, ushbu ilmiy ishning dolzarbligi quyidagilarda namoyon bo'ladi:

1. Oliy matematikadagi abstrakt tushunchalarning konkret hayotiy jarayonlarga tatbiq etilishi;
2. Limit va hosila yordamida dinamik jarayonlarni modellashtirish va tahlil qilish imkoniyati;

3. Elektronika, mexanika, biologiya va iqtisodiyotda hosila yordamida o'zgarishlarni tahlil qilish yondashuvi;

4. Matematik bilimlarni amaliy masalalarga yo'naltirish orqali o'quvchilarning ilmiy dunyoqarashini shakllantirish.

Yuqoridagi fikrlar asosida ushbu maqola egri chiziqqa urinma, limit va hosila tushunchalari, ularning nazariy asoslari va amaliy qo'llanilishi haqida to'liq tasavvur berish bilan birga, o'quvchi-yoshlarning mustaqil tahlil qilish qobiliyatini rivojlantirishga ham xizmat qiladi.

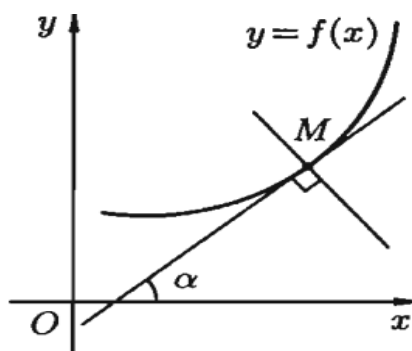
Egri chiziqqa o'tkazilgan urinma haqida umumiy tushuncha beramiz. L uzluksiz egri chiziqda M va M_1 nuqtalarni olamiz (1 chizma). Bu nuqtalar orqali o'tuvchi MM_1 to'g'ri chiziqni kesuvchi deb ataymiz. M_1 nuqta L chiziq bo'ylab harakatlanib, biror M nuqtaga chegaralanmagan holda yaqinlashsin. U holda M nuqtaning atrofida MT limitga intiladi.

Berilgan egri chiziqqa M nuqtada o'tkazilgan urinma deb, MM_1 kesuvchining MT holatiga aytiladi. Bunda ikki kesishish nuqtasi M_1 chegaralanmagan holda M nuqtaga yaqinlashadi.

Endi $M(x, y)$ nuqtada vertikal bo'lmagan urinmaga ega uzluksiz $y = f(x)$ funksiyaning grafigini qaraymiz. Uning burchak koeffitsienti $k = \tan \alpha$ ga teng, bu erda α - urinmaning OX o'qi bilan hosil qilgan burchagi.

Absissasi $x + \Delta x$ bo'lgan M va M_1 nuqtalar orqali grafikka kesuvchi o'tkazamiz (rasm 1). MM_1 kesuvchi va OX o'qi orasidagi burchakni φ bilan belgilaymiz. 1-chizmadan ko'rinadiki, kesuvchining burchak koeffitsienti

$$k = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



1 chizma.

Funksiyaning uzluksiz ta'rifiga ko'ra $\Delta x \rightarrow 0$ da Δy ham nolga intiladi; shuning uchun M_1 nuqta egri chiziq bo'ylab M nuqtaga chegaralanmagan holda yaqinlashadi, MM_1 kesuvchi esa M nuqtaning atrofida urinmaga aylanadi. Burchak

$$\varphi \rightarrow \alpha, \text{ ya'ni } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi = \alpha$$

Demak,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tan \varphi = \tan \alpha \quad (1)$$

Shuning uchun urinmaning burchak koeffitsienti

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2)$$

(1) va (2) ko'rinishdagi limitlarni hisoblash bir qancha masalalarni echishda qo'llaniladi. Quyidagilarni ko'rsatishimiz mumkin:

Agar $Q = Q(t)$ - o'tkazgichdan t vaqt mobaynida o'tgan elektronlar soni bo'lsa, u holda t vaqt davomidagi tok kuchi

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t} \quad (1)$$

Agar $N = N(t)$ - t vaqt mobaynida kimyoviy reaksiyaga kirishadigan unsurlar soni bo'lsa, u holda t vaqtdagi reaksiya tezligi

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} \quad (2)$$

Agar $m = m(x)$ - $O(0,0)$ va $M(x, 0)$ nuqtalar orasidagi bir jinsli sterjenning massasi bo'lsa, u holda sterjenning x nuqtadagi chiziqli zichligi

$$\gamma = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} \quad (3)$$

(1) – (3) limitlar bir xil ko'rinishga ega bo'lib, ularning barchasida funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatining limitini topish talab hilinadi.

Masala 1. Elektr toki kuchining oniy qiymatini aniqlash:

O'tkazgichdan t vaqt davomida o'tgan zaryad miqdori quyidagi funksiya bilan berilgan:

$$Q(t) = 2t^3 + 5t^2 + 3t \text{ [Kulon]}$$

$t = 2$ sekund vaqtda o'tkazgichdagi tok kuchining oniy qiymatini aniqlang.

Yechish:

Tok kuchining oniy qiymati zaryad funksiyasining hosilasidir:

$$I(t) = Q'(t) = \frac{d}{dt} (2t^3 + 5t^2 + 3t) = 6t^2 + 10t + 3;$$

$$I(2) = 6 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 3 = 47 \text{ Amper}$$

Javob: $t = 2$ da tok kuchining oniy qiymati 47 Amper.

Masala 2. Biologik jarayonda o'sish tezligini aniqlash

Bakteriyalar soni vaqtga bog'liq holda quyidagicha o'smoqda:

$$N(t) = \frac{800}{(1 + 4e^{(-0,3t)})}$$

3-soatda bakteriyalar sonining o'sish tezligini aniqlang.

Yechish:

Bu logistik funksiyaning hosilasini olamiz:

$$N'(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{800}{(1 + 4e^{(-0,3t)})} \right)$$

$t = 3$ da:

$$e^{(-0,3 \cdot 3)} \approx 0.4066 \Rightarrow N'(t) = (800 \times 4 \times 0.3 \times 0.4066) / (1 + 4 \times 0.4066)^2 \approx 97.6 / (2.6264)^2 \approx 14.2 \text{ bakteriya/soat};$$

Javob. 3-soatda bakteriyalar soni 14.2 ta/soat tezlik bilan ortmoqda.

3-masala. Metall sterjenning chiziqli zichligini aniqlash

Sterjenning 0 dan x gacha bo'lgan uzunlikdagi massasi quyidagicha aniqlanadi:

$$m(x) = x^2 + 4x \text{ [gramm]}$$

$x = 5 \text{ sm}$ da sterjenning chiziqli zichligini (massaning uzunlikka nisbiy o'zgarishi) aniqlang.

Yechish:

Chiziqli zichlik bu $m(x)$ funksiyasining hosilasidir:

$$\gamma(x) = m'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 + 4x) = 2x + 4$$

$$\gamma(5) = 2 \cdot 5 + 4 = 14 \text{ gramm/sm}$$

Javob. $x = 5 \text{ sm}$ da zichlik 14 g/sm ;

4-masala. Aholi sonining o'sish tezligini topish (Iqtisodiy demografiya)

Aholi soni yiliga quyidagicha ortmoqda:

$$P(t) = 3\,000\,000 + 200\,000t + 10\,000t^2$$

5-yilda aholi sonining o'sish tezligini (yillik oniy ortish) aniqlang.

Yechish.

O'sish tezligi bu – $P(t)$ funksiyasining hosilasidir:

$$P'(t) = \frac{d}{dt}(3\,000\,000 + 200\,000t + 10\,000t^2)$$

$$P'(5) = (200\,000 + 20\,000 \cdot 5)$$

Javob: 5-yilda aholi sonining o'sish tezligi $300\,000 \text{ kishi/yil}$.

5-masala: Neft quvuridagi oqim tezligini aniqlash

Quvurlardan o'tayotgan neft hajni vaqtga qarab quyidagicha o'zgaradi:

$$V(t) = 150t - 4t^2$$

$$V'(t) = \frac{d}{dt}(150t - 4t^2) = 150 - 8t$$

$$t = 3 \text{ minutda}$$

$$V'(3) = 150 - 24 = 126 \text{ litr/minut}$$

Hozirgi zamon texnologiyalari, axborot-kommunikatsiya tizimlari va fan taraqqiyotining jadal sur'atlar bilan rivojlanib borayotgan davrida matematik analiz, ayniqsa, limit va hosila tushunchalari ilm-fanning deyarli barcha sohalarida nazariy va amaliy muammolarni hal etishda asosiy vosita sifatida qaralmoqda. Ushbu ilmiy maqolada limit tushunchasiga asoslangan urinma va kesuvchi g'oyalari, ularning analitik ifodalanishi va matematik asoslari chuqur tahlil qilinib, ular orqali turli real jarayonlarni modellashtirish imkoniyatlari atroflicha ko'rib chiqildi.

Tadqiqot davomida ko'rsatib o'tilganidek, urinmaning burchak koeffitsientini limit orqali aniqlash orqali harakat, oqim, o'sish, zichlik, ortish tezligi kabi turli xil fizik, biologik va ijtimoiy-iqtisodiy jarayonlarni tahlil qilish mumkin bo'ladi. Ayniqsa, zamonaviy muhandislik, fizika, informatika, iqtisodiyot, biologiya, demografiya, ekologiya kabi fanlarda bu kabi differensial yondashuvlar muhim nazariy va amaliy ahamiyatga ega.

Berilgan misollar orqali har bir sohaga xos bo'lgan jarayonlar (elektr toki kuchining oniy qiymatini topish, bakteriyalar sonining o'sish tezligini aniqlash, metall jismlarning chiziqli zichligini hisoblash, aholi sonining yillik o'sish sur'atini tahlil qilish va neft oqimining vaqtga bog'liq o'zgarishini aniqlash) limit va hosila yordamida qanday hal qilinishi ochiq va ilmiy asosda ko'rsatib berildi. Bu esa oliy matematikaning nazariy bilimlarini hayotiy ehtiyojlar bilan bog'lash, real modellar bilan ishlash, eksperimental tadqiqotlarni matematik analizga asoslab olib borish imkoniyatlarini ochib beradi.

Shuningdek, urinma va kesuvchi tushunchalarining geometrik asoslari ham chuqur tahlil qilinib, bu orqali analitik va geometrik yondashuvlarning uyg'unligi ko'rsatildi. Bu esa o'quvchilarning matematik tafakkurini rivojlantirish, fanlararo integratsiyani chuqurlashtirish va ilmiy dunyoqarashini shakllantirishda alohida ahamiyat kasb etadi.

Xususan, maqola quyidagi ilmiy va amaliy natijalarga asos bo'ladi:

- Limit va hosila tushunchalarining matematik-analitik va geometrik yondashuv orqali aniqlanishi;
- Harakat, oqim, zichlik, tezlik va o'sish kabi fizikaviy va biologik jarayonlarni modellashtirishda hosilaning qo'llanilishi;
- Real vaqtda o'zgaruvchan jarayonlarni nazorat qilish, optimallashtirish va bashoratlash imkonini beruvchi matematik vositalar sifatida limit va hosilaning o'rni;
- Zamonaviy fanlararo tadqiqotlarda matematik analiz usullarining integratsion ahamiyati;
- Talabalar va tadqiqotchilar uchun nazariy bilimlarni amaliyot bilan bog'lashga oid metodik asos bo'lishi.

Xulosa qilib aytganda, bu maqola orqali matematik analizning, ayniqsa, limit va hosila tushunchalarining nazariy va amaliy jihatlarini chuqur tahlil qilindi, hamda ularning turli fanlar kesimida qanday tatbiq etilishi keng yoritildi. Ushbu yondashuv nafaqat oliy matematikaning o'quv jarayonidagi dolzarbligini ta'kidlaydi, balki o'quvchi va izlanuvchilarning ilmiy salohiyatini rivojlantirish, ularning muhandislik va ilmiy masalalarni yechish ko'nikmalarini shakllantirishga xizmat qiladi. Shu bilan birga, fanlararo integratsiyani chuqurlashtirish va matematikaning amaliy qadriyatlarini oshirish yo'lida muhim ilmiy metodologik asos bo'lib xizmat qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

5. Sh.R.Xurramov Oliy matematika (masalalar to'plami, nazorat topshiriqlari) 1-qism: o'quv qo'llanma, "Fan va texnologiya" Toshkent-2015 - 408 bet.

6. Karimov E., Meliboyev A., Islomov B. Oliy matematika. 1-qism. Toshkent: "Fan va texnologiya", 2016. – 432 bet