

**TEKNOLOGIK TIZIMLARDA FIZIK PARAMETRLAR O'ZGARISHINI
BAHOLASHDA LAGRANJ TEOREMASINING ANALITIK QO'LLANILISHI****Abdullayeva Dildora Anvarovna***Navoiy davlat konchilik va texnologiyalar universiteti,
Oliy matematika va axborot texnologiyalari kafedrası katta o'qituvchi*

Annotatsiya. *Mazkur maqolada differensial hisoblashning muhim natijalaridan biri bo'lgan Lagranjning o'rta qiymat teoremasining real texnologik va muhandislik tizimlarida amaliy qo'llanishi tahlil etiladi. Sanoat jarayonlarida harorat, bosim, quyosh energiyasi oqimi kabi fizik parametrlarning vaqt bo'yicha qanday o'zgarishi real vaqtda kuzatib borilishi va tahlil qilinishi texnik xavfsizlik, samarali boshqaruv hamda energiya tejamkorligini ta'minlashda muhim ahamiyatga ega.*

Annotation. *This article analyzes the practical application of one of the key results of differential calculus the Lagrange mean value theorem in real-world technological and engineering systems. In industrial processes, real-time monitoring and analysis of how physical parameters such as temperature, pressure, and solar energy flux vary over time is crucial for ensuring technical safety, effective control, and energy efficiency.*

Kalit so'zlar: *Lagranj o'rta qiymat teoremasi, differensial hisob, real vaqtli monitoring, harorat sezgirligi, quyosh energiyasi oqimi, bosim o'zgarishi, texnik tizimlar, matematik modellash, fizik parametrlar, avtomatlashtirilgan boshqaruv, raqamli tahlil, sanoat jarayonlari, energiya samaradorligi, muhandislik amaliyoti, analitik yechim, texnik xavfsizlik, hosila, o'rtacha o'zgarish tezligi, strategik boshqaruv.*

Keywords: *Lagrange mean value theorem, differential calculus, real-time monitoring, temperature sensitivity, solar energy flux, pressure variation, technical systems, mathematical modeling, physical parameters, automated control, digital analysis, industrial processes, energy efficiency, engineering applications, analytical solution, technical safety, derivative, average rate of change, strategic management.*

Sanoat va texnologik tizimlar tobora murakkablashib borayotgan bir davrda, ularning ishonchli ishlashini ta'minlash uchun real vaqt rejimida o'zgaruvchan fizik kattaliklarni nazorat qilish zarurati ortib bormoqda. Bunday parametrlar qatoriga harorat, bosim, energiya oqimi, tezlik kabi ko'rsatkichlar kiradi. Ularning vaqt bo'yicha qanday o'zgarishini chuqur tahlil qilish esa, ko'plab muhandislik, energetika va ishlab chiqarish jarayonlarida asosiy rol o'ynaydi. Ayniqsa, texnologik jarayonlarning barqarorligini ta'minlash, ortiqcha yuklamalarni oldindan aniqlash, avariya holatlarning oldini olish kabi holatlarda matematik modellash muhim vosita hisoblanadi.

Matematik analizning asosiy bo'limlaridan biri bo'lgan differensial hisoblash usullari aynan shu turdagi tahlillar uchun qulay nazariy poydevor yaratadi. Xususan, Lagranjning o'rta qiymat teoremasi real jarayonlarda sodir bo'ladigan o'zgarishlarning o'rtacha va mahalliy xususiyatlarini baholashga imkon beradi. Teorema yordamida berilgan oraliqda o'rtacha tezlikka yoki o'zgarish darajasiga teng bo'lgan aniq vaqt nuqtasi mavjudligi kafolatlanadi. Bu

esa, fizik jarayonlarning eng sezilarli, eng faol yoki eng xavfli nuqtalarini aniqlash imkonini beradi.

Mazkur maqolada Lagranj teoremasining turli texnik tizimlardagi amaliy qo'llanilishiga bag'ishlangan bir necha model tahlil qilinadi. Jumladan, harorat sensori sezgirligini baholash, quyosh nurlanishining intensivligini modellash, va magistral quvurlardagi bosimning vaqt bo'yicha o'zgarishini aniqlash singari real hayotdagi masalalar matematik nuqtai nazardan chuqur tahlil etiladi. Har bir masala asosida analitik yechimlar orqali o'rtacha o'zgarish tezligi hisoblanib, ushbu o'zgarishga mos keluvchi muhim vaqt momentlari aniqlanadi. Bunday yondashuv raqamli monitoring tizimlarini loyihalash, energetik samaradorlikni oshirish va avtomatlashtirilgan boshqaruv strategiyalarini ishlab chiqishda muhim rol o'ynaydi.

Masala. Lagranj teoremasi asosida harorat sensori sezgirligini baholash. sanoat tarmoqlarida masalan, issiqlik elektr stansiyalarida, kimyo sanoatida yoki mikrochiplar ishlab chiqarishda harorat o'zgarishini real vaqt rejimida kuzatib borish zarur. Bunday holatlarda harorat sensori har bir vaqtda aniqlik bilan harorat o'zgarishini qayd etishi kerak.

Faraz qilaylik, zavodda o'rnatilgan harorat sensori vaqt o'tishi bilan haroratni qayd etadi. Harorat quyidagi matematik funksiya orqali ifodalangan: harorat o'zgarishi quyidagi funksiya bilan ifodalangan:

$$T(t) = 5t^3 - 3t^2 + 2t + 10$$

haroratni vaqtga bog'liq holda ifodalovchi funksiya, $t \in [1,3]$ soat oralig'ida

Ushbu vaqt oralig'ida sensorning sezgirligi eng ko'p qaysi vaqtda o'zgaradi? Boshqacha aytganda, qaysi vaqtda harorat o'zgarishi tezligi maksimal qiymatga ega? Buning uchun Yechish. Lagranj teoremasi va uning natijalarini qo'llab masalani yechamiz:

Lagranj teoremasi. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lsa, u holda ushbu oraliqda hech bo'lmaganda bitta $c \in (a, b)$ nuqta mavjud bo'lib:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Lagranj teoremasi shartlari bo'yicha $T(t)$ polinom funksiya bo'lib, har qanday t da uzluksiz va differensiallanuvchi. Demak, $T(t)$ funksiyasi uchun Lagranj teoremasini qo'llash mumkin.

$$\frac{T(3) - T(1)}{3 - 1} = \frac{5 \cdot 27 - 3 \cdot 9 + 6 + 10 - (5 - 3 + 2 + 10)}{2} = \frac{124 - 14}{2} = 55$$

Agar funksiya, $T(t) = 5t^3 - 3t^2 + 2t + 10$ berilgan bo'lsa, bu vaqtga bog'liq harorat funksiyasidir. Biz $t = 1$ dan $t = 3$ gacha oraliqda harorat qanday o'zgarganini bilamiz. Ushbu oraliqda Lagranj o'rta qiymat teoremasi quyidagicha qo'llaymiz:

Agar funksiya kesmada uzluksiz va ichki nuqtalarda differensiallanuvchi bo'lsa, u holda shu kesmada hech bo'lmaganda bitta $c \in (1,3)$ nuqta topiladiki:

$$\frac{T(3) - T(1)}{3 - 1} = T'(c)$$

Bu chap tomonda o'rtacha o'zgarish tezligi, o'ng tomonda esa haqiqiy tezlik aniq bir nuqtadagi hisoblanadi.

Bu haroratning vaqt bo'yicha o'zgarish tezligi degani.

Demak, agar sizning sensoringiz 2 sekundda harorat $40^{\circ}C$ dan $150^{\circ}C$ ga oshganini ko'rsa, bu $55^{\circ}C/soat$ tezlikda oshgan degani. Aynan Lagranj teoremasiga ko'ra, bu oraliqda shunday aniq c nuqta borki, funksiyaning hosilasi aniq o'zgarish tezligi shu o'rtacha o'zgarish tezligiga teng bo'ladi. Shuning uchun $T'(t) = \frac{dt}{dt}$ tenglamada: $T'(t) = 15t^2 - 6t + 2$; $T'(c) = 55$ deb olib, $15c^2 - 6c - 53 = 0$ tenglamani yechamiz. Bu yechimdan $c \approx 2.09c$ chiqadi. vaqt nuqtasida haroratning o'zgarish tezligi aynan o'rtacha tezlikka teng bo'lgan, ya'ni bu real jarayonda harorat eng faollik bilan o'zgargan paytni bildiradi. Bu nazorat va signal tizimlari uchun strategik ahamiyatga ega bo'lgan nuqtadir. Masalan, harorat o'zgarishi $55^{\circ}C/soat$ ga yetganda signal berish kerak bo'lsa, tizim aynan shu 2.09c daqiqada avtomatik javob berishi kerak.

Berilgan masala orqali biz differensial hisoblashning asosiy nazariyalaridan biri Lagranjning o'rta qiymat teoremasining amaliy qo'llanishini tahlil qildik. Ushbu teorema funksiya ma'lum oraliqda uzluksiz va differensiallanuvchi bo'lsa, shu oraliqda hech bo'lmaganda bitta nuqta topilishini kafolatlaydi, bunda funksiya hosilasi shu oraliqdagi o'rtacha o'zgarish tezligiga teng bo'ladi.

Bu nafaqat matematik nuqtayi nazardan, balki real fizikaviy va muhandislik jarayonlarini tahlil qilishda ham muhim xulosa. Chunki bu orqali o'zgarishning eng faol, eng sezilarli yoki optimal nuqtasi aniqlanadi. Aynan shu prinsip asosida avtomatik nazorat tizimlari, masalan, harorat sensorlari, harakat detektorlari, bosim regulyatorlari ishlaydi. Lagranj teoremasi faqatgina o'rtacha qiymatni emas, balki real fizik jarayonni matematik nuqtada tahlil qilish inkonini beradi. Bu usul muhandislikda harorat, tezlik, bosim, kuchlanish o'zgarishlarida, biologiyada populyatsiya o'sish tezligi, iqtisodiyotda narxlar va talab o'zgarishi kabi turli sohalarda foydalanish mumkin.

Ayniqsa, ushbu masalada ko'rilganidek, sensorlar bilan ishlaydigan real vaqtli monitoring tizimlari uchun bu natija o'ta muhim, hosilaning o'rtacha o'zgarishga teng bo'lgan nuqtasini aniqlash maksimal sezuvchanlikka ega vaqtni aniqlashdir.

Hozirgi zamon texnologiyasida, ayniqsa, quyosh energiyasi asosida ishlovchi tizimlarda sun'iy yo'ldoshlar, fotovoltaiq panellar va quyosh fermalari nurlanish oqimini vaqt bo'yicha matematik modellashtirish va tahlil qilish muhim ahamiyatga ega. Bunda energiyaning maksimal tushish tezligi ya'ni nurlanishning eng intensiv o'zgarishi tizim ish faoliyatining asosiy aniqlovchilaridan biri bo'lib xizmat qiladi.

Ushbu maqolada quyoshdan kelayotgan energiya quvvatining vaqtga bog'liq modeliga Lagranjning o'rta qiymat teoremasi qo'llaniladi va real fizikaviy jarayonga matematik yondashuv asosida chuqur tahlil qilinadi. Bundan tashqari Lagranjning o'rta qiymat teoremasi amaliy muhandislik jarayonlarini matematik modellashtirishda qanday ishlashini ko'rsatish maqsad qilingan. Buning uchun vaqtga bog'liq tarzda o'zgaruvchi fizik parametrlar (harorat, quyosh nurlanishi, bosim) bilan bog'liq real holatlarga matematik yondashuv asosida tahlil olib boriladi. Har bir holatda o'ziga xos funksiya tanlanadi va bu funksiya belgilangan vaqt oraliqda uzluksiz hamda differensiallanuvchi bo'lishi teorema shartlariga mosligi aniqlanadi.

So'ng, o'sha oraliqdagi o'rtacha o'zgarish tezligi hisoblanib, aniq bir vaqt momentida bu o'rtacha o'zgarishga mos keluvchi real tezlikni beruvchi nuqta (ya'ni teoremaning "c" nuqtasi) aniqlanadi. Bu esa sensorlarning eng yuqori sezgirlik davrini, energiyaning eng

intensiv tushish vaqtini, yoki bosimning o'zgarishidagi xavfli nuqtalarni aniqlash imkonini beradi.

Quyida keltirilgan uchta masala harorat sensorlari, quyosh energiyasi va magistral quvur bosimi bilan bog'liq bo'lib, ularning har biri orqali Lagranj teoremasining real fizik jarayonlarda qanday qo'llanishi chuqur tahlil qilinadi.

Masala. Radiatsiyaviy energiya tarqalishining baholanishi orqali Lagranj teoremasining amaliy qo'llanilishi. Sun'iy yo'ldosh quyosh energiyasini qabul qiluvchi panelga ega. Quyoshdan kelayotgan energiya quyidagi matematik model asosida beriladi. Ushbu energiya o'zgarishini va maksimal tushish tezligini aniqlash zarur.

$$E(t) = 1200 \sin \frac{\pi \cdot t}{12} \quad t \in [0; 12]$$

$E(t)$ –vaqt t da quyosh paneliga tushayotgan energiya oqimi (W/m^2), t vaqt, ertalab 6:00 dan kechki 18:00 gacha (12 soatlik kun oraliq), 1200 maksimal quyosh nurlanish kuchi (W/m^2), $\frac{\pi \cdot t}{12}$ vaqtning sinusoidal xarakterini ifodalovchi modulyator.

Quyosh energiyasi quvvatining o'rtacha tushish tezligi butun kunduzgi vaqt oralig'ida qanday o'zgarayotganini baholash; maksimal tushish tezligi ya'ni energiya vaqt bo'yicha hosilasining maksimal qiymatini aniqlash; Ushbu maksimal qiymat qaysi aniq vaqt nuqtasida sodir bo'lishini aniqlash.

Bu baholash energetik samaradorlikni oshirish, batareyani zaryadlashni rejalashtirish, va quyosh energiyasidan optimal foydalanish strategiyalarini ishlab chiqish uchun zarur.

Energiyaning o'rtacha o'zgarish tezligini toping va Lagranj teoremasiga asoslanib, energiya tushish tezligi eng katta bo'ladigan vaqtni toping.

Yechish. Lagranj teoremasi bo'yicha, o'rtacha o'zgarish tezligi:

$$\frac{E(12) - E(0)}{12 - 0} = \frac{1200 \sin \pi - 1200 \sin 0}{12} = \frac{0 - 0}{12} = 0 \text{ } W \text{ } m^2 / soat ;$$

Energiyaning vaqt bo'yicha o'zgarish tezligi aniqlash uchun energiya funksiyasining hosilasini hisoblaymiz:

$$E'(t) = \left(1200 \sin \frac{\pi t}{12} \right)' = 1200 \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi t}{12} = 100\pi \cdot \cos \frac{\pi \cdot t}{12}$$

Maksimal tushish tezligi trigonometrik funksiyalarda $\cos x$ maksimal qiymatga ega bo'lganda $x = 0$, ya'ni

Shuningdek, $\cos \frac{\pi t}{12} = 1$ da maksimal qiymatga erishiladi. Shuning uchun:

$$E'(0) = 100\pi \approx 314,16 \text{ } m^2 / soat$$

Bu quyosh energiyasining eng katta o'zgarish tezligi bo'lib, kunduzgi siklning boshlanishida soat 6:00 da sodir bo'ladi. Lagranj teoremasi bo'yicha aniqlangan $E'(T) = 314,16 \text{ } W/m^2 / soat$ qiymat quyidagini anglatadi:

Quyosh chiqqan vaqtda soat 6:00 da quyosh paneliga energiya oqimi eng tez sur'atda o'zgarib boshlaydi. Bu nuqtada panelga tushayotgan nurlanish grafigida urinma to'g'ri chiziq grafigi bilan maksimal burchak ostida joylashgan bo'ladi. Bu hodisa quyosh nurlanishining energiya zichligi bo'yicha eng intensiv fazasini bildiradi. Bu baholash orqali quyosh panelini yoki batareyani eng samarali zaryadlash vaqti aniqlanishi mumkin.

Mazkur masala orqali Lagranj teoremasining real fizikaviy modelda qanday ishlashini ko'rdik. Quyosh energiyasining vaqtga bog'liq sinusoidal modeli orqali o'rtacha tushish tezligi nol bo'lsa ham, bu faqat umumiy balansni bildiradi; hosila orqali aniqlangan maksimal tushish tezligi ($314.16 \text{ W/m}^2/\text{soat}$) esa tizim ish faoliyatining real tezkorligiga mos keladi; bu o'zgarish kunduzgi sikl boshida sodir bo'lishi aniqlanadi

Shunday qilib, Lagranj teoremasi yordamida real energetik tizimlarni modellashtirish, optimallashtirish va boshqarish uchun zarur bo'lgan aniq vaqt nuqtalari aniqlanadi. Bunday matematik tahlillar energiya samaradorligini oshirish va tizim dizaynini takomillashtirish uchun muhim vositadir.

Masala. Magistral quvur liniyasidagi suv bosimining o'zgarishini tahlil qilishda Lagranj teoremasining tadbiqu. Suv ta'minoti tizimlarida magistral quvurlar orqali suvning bosimi ma'lum vaqtda ortib yoki kamayib boradi. Quvur tarmog'i samaradorligini va xavfsizligini ta'minlash uchun bosimning vaqt bo'yicha qanday o'zgarishini aniqlash muhimdir. Ayniqsa, bosim haddan oshib ketmasligi uchun nazorat nuqtalarida maksimal bosimga yaqin lahzalarni aniqlash talab qilinadi.

Bu yerda Lagrange teoremasini qo'llab, o'rtacha bosim o'zgarish tezligiga teng bo'lgan aniq bir lahzani topish mumkin. Bu texnik xizmat ko'rsatish va avtomatlashtirishda muhim rol o'ynaydi. Suv ta'minoti tizimidagi magistral quvurning bosimi $P(t)$ bar quyidagi model bo'yicha vaqtga bog'liq o'zgaradi t – soatda, $t \in (0,4)$

$$P(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 4$$

Ushbu 4 soat ichida suv bosimining o'rtacha o'zgarish tezligini toping. Lagrange teoremasi asosida shu o'rtacha tezlikka teng real vaqtda bosim o'zgarishi qachon sodir bo'lganini aniqlang.

Yechish. O'rtacha bosim o'zgarish tezligini hisoblaymiz:

$\frac{P(b)-P(a)}{b-a}$ formula orqali topamiz:

$$\frac{P(4) - P(0)}{4 - 0} = \frac{(2 \cdot 64 - 9 \cdot 16 + 12 \cdot 4 + 4) - (0 - 0 + 0 + 4)}{4} = \frac{36 - 4}{4} = 8$$

Demak, 0 dan 4 soatgacha bo'lgan vaqtda bosim o'rtacha 8 bar/soat tezlikda oshgan. Lagrange teoremasiga asosan shu o'rtacha tezlikka teng bo'lgan vaqtni topish. Lagranj teoremasi shartiga asosan hosilani topamiz:

$$P'(t) = (2t^3 - 9t^2 + 12t + 4)' = 6t^2 - 18t + 12$$

Endi shu hosilani 8 ga tenglab, c ni topamiz:

$6c^2 - 18c + 12 = 8 \Rightarrow 6c^2 - 18c + 4 = 0 \Rightarrow$ Bu kvadrat tenglamani diskriminant yordamida yechamiz:

$$D = \sqrt{228} \approx 15,1$$

$$c_{1,2} = \frac{18 \pm 15,1}{2 \cdot 6} \Rightarrow c_1 = \frac{2,9}{12} = 0,24; c_2 = \frac{33,1}{12} = 2,76;$$

Har ikkala qiymat ham $t \in (0,4)$ oraligida yotadi, shuning uchun ikkalasi ham Lagranj teoremasining yechimi bo'lishi mumkin. Ushbu masala uchun quvur bosimi o'rtacha 8 bar/soat tezlik bilan birinchi marta taxminan 0.24 soatda ya'ni 14 daqiqadan keyin, ikkinchi marta taxminan 2.76 soatda ya'ni $2 \text{ soat } 46 \text{ daqiqada}$ sodir bo'ladi.

Quvur liniyalarida suyuqlikning harakati va bosimning vaqt bo'yicha o'zgarishi real sanoat tizimlarida muhim texnik masalalardan biridir. Ayniqsa, suv ta'minoti, neft va gaz transporti, issiqlik taqsimoti kabi tizimlarda bosimning keskin ortishi yoki kamayishi favqulodda holatlarga olib kelishi mumkin. Ushbu holatlarni oldindan bashorat qilish va optimallashtirish maqsadida matematik modellashirish usullari qo'llaniladi.

Mazkur tadqiqotda bosimning vaqtga bog'liqligi $P(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 4$ tarzida ifodalangan bo'lib, bu model 0 dan 4 soatgacha bo'lgan oraliqda tahlil qilindi. Amaliy hisob-kitoblar asosida ushbu vaqt oralig'ida bosimning o'rtacha o'zgarish tezligi **8 bar/soat** ekanligi aniqlandi. Bu esa tizimda 4 soat davomida bosim qanday darajada va qanchalik tezlikda o'zgarayotganini ifodalaydi.

Bu o'rtacha o'zgarish tezligiga mos aniq vaqt momentlarini aniqlash uchun Lagranj teoremasi qo'llanildi. Teorema shartlariga ko'ra, berilgan oraliqda differensiallanuvchi bosim funksiyasi uchun kamida bitta ham $c \in (0,4)$ mavjud bo'lib, unda $P'(c) = 8$ bo'ladi. Analitik yechim natijasida 2 ta vaqt momenti taxminan: **0.24 soat ya'ni 14 daqiqa** va **2.76 soat ya'ni 2 soat 46 daqiqa** aniqlandi.

Bu vaqtlarda real fizik jarayon davomida bosim o'rtacha tezlikda o'zgarayotgan bo'lgan. Bu matematik xulosa texnik nuqtai nazardan juda katta ahamiyatga ega:

Suv ta'minoti tizimlarini avtomatlashtirilgan boshqaruv tizimlari orqali nazorat qilishda ushbu aniqlangan vaqtlar asos bo'lishi mumkin. Ayniqsa, nasoslarni yoqish o'chirish, bosim regulyatorlarini faollashtirish uchun kritik vaqtlar aniqlanadi. Profilaktik xizmatlar rejalashtirish Bosim o'zgarishining maksimal yoki o'rtacha tezlikda sodir bo'lishi quvurlarning materiallariga yuklama keltiradi. Bu yuklamalar asosida texnik xizmat ko'rsatish grafiklari optimallashtiriladi. Xavfsizlikni oshirish Haddan tashqari tez bosim o'zgarishi quvurlarda yorilish, muhrlarning yirtilishi yoki portlash xavfini tug'diradi. Aniqlangan vaqtlar bosimning eng sezilarli o'zgarishi ro'y beradigan onlarni ko'rsatib, signalizatsiya tizimlari uchun asos bo'lib xizmat qiladi. Tizim modelini tekshirish va verifikatsiya qilish: Matematik model va amaliy o'lchovlar mosligini tekshirish orqali quvur tizimining fizikaviy modeliga aniqlik kiritiladi.

Shuningdek, bu yondashuv boshqa fizik va texnik tizimlarga ham tadbiq qilinishi mumkin, masalan: harorat o'zgarishi, gaz bosimi, elektr tok kuchi, transport oqimlari va boshqalar.

Lagranj teoremasining amaliy qo'llanilishi real muhandislik tizimlaridagi fizik parametrlarning vaqtga bog'liq o'zgarishini baholash va nazorat qilishda yuqori samarali matematik vosita hisoblanadi. Tadqiqotda ko'rilgan bosim funksiyasining tahlili shuni ko'rsatdiki, o'rtacha o'zgarish tezligi bilan real o'zgarish tezligining mos keluvchi nuqtalarini aniqlash orqali tizimni chuqur tahlil qilish, optimallashtirish va prognozlash mumkin. Bu esa zamonaviy muhandislikning muhim talabi bo'lgan raqamli modellashirish va aqilli boshqaruv algoritmlarini ishlab chiqish uchun ishonchli nazariy asos bo'lib xizmat qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

3. A.I.Abdullayev, O.S.To'laganov Oliy matematika asoslari (amaliy yo'nalishlar uchun). - Toshkent: TDPU nashriyoti, 2022.-360 bet.
4. S.Matmurodov Tibbiyotda matematik modelashtirish asoslari. - Toshkent: "Iqtisod-moliya" nashriyoti, 2020. - 256 bet.