

KO'P O'ZGARUVCHI FUNKSIYALAR ASOSIDA SIRT INTEGRALLARINING FIZIK VA MUHANDISLIK TIZIMLARIDAGI AMALIY QO'LLANILISHI

Ismoilova Zamira Tuxtayevna

*Navoiy davlat konchilik va texnologiyalar universiteti,
Oliy matematika va axborot texnologiyalari kafedrası katta o'qituvchi*

Annotatsiya. Mazkur maqolada ko'p o'zgaruvchili funksiyalar integrallari, xususan, sirt integrallarining real fizikaviy va muhandislik jarayonlaridagi amaliy qo'llanilishiga ilmiy yondashuvda tahlil berilgan. Sirt integrallari orqali bosim ostida bajariladigan ish, issiqlik oqimi, elektrostatik kuchlanganlik oqimi va suyuqlik oqimi kabi turli fizik hodisalar modellashtirilib, to'rtta real muammo asosida matematik modellari ishlab chiqilgan. Har bir masala vektor maydonlar, normal vektorlar va sirt elementlari orqali sirt integrali formulasiga asoslanib yechilgan. Ushbu yondashuv texnologik tizimlarning energiya samaradorligini oshirish, xavfsizligini ta'minlash va muhandislik hisoblarini aniq amalga oshirishda muhim ahamiyatga ega. Natijalar sanoat konstruksiyalarining barqarorligini baholash, issiqlik va elektr tizimlarini loyihalash, shuningdek, oqimlar nazariyasini qo'llashda amaliy qiymatga egadir.

Annotation. This article provides a scientific analysis of the practical applications of surface integrals, which arise from multivariable calculus, in real-world physical and engineering processes. The surface integral is a vital mathematical tool for modeling and quantifying physical quantities—such as forces, fluxes, and energy distribution—across surfaces in three-dimensional space. The paper examines four key applications: mechanical work done by pressure on a spherical container, heat flux across a spherical boundary, electric flux calculated via Gauss's theorem, and the total fluid flow through a spherical surface. Each case is formulated using vector fields, surface normals, and differential surface elements, leading to analytically derived expressions. The findings are crucial for evaluating the safety, efficiency, and energy optimization of industrial systems such as high-pressure vessels, thermal systems, and electrical components. This approach supports accurate design, safety assessments, and energy-efficient engineering solutions in various technological fields.

Kalit so'zlar: Sirt integrali, bosim ostida ish, issiqlik oqimi, elektrostatik kuchlanganlik, Gauss teoremasi, sferik sirt, oqim nazariyasi, vektor maydon, differensial geometriya, energiya tahlili, muhandislik amaliyoti

Keywords: Surface integral, mechanical work, pressure on surface, heat flux, electric field intensity, Gauss's theorem, spherical surface, vector field, flux analysis, energy efficiency, engineering applications

Texnologiyaning keskin rivojlanishi bilan birga murakkab fizikaviy, muhandislik va texnologik jarayonlarni chuqur tushunish va takomillashtirishga ehtiyoj kuchaymoqda. Shu nuqtai nazardan, ko'p o'zgaruvchili funksiyalar va ularning integrallari, xususan, sirt integrallari amaliyotda keng qo'llanilmoqda. Sirt integrallari uch o'lchovli fazodagi sirtlar orqali harakatlanuvchi fizik kattaliklarni masalan, kuchlar, oqimlar, energiya taqsimoti kabi hodisalarni tahlil qilish uchun zaruriy matematik vosita hisoblanadi.

Sirt integrallari yordamida bosim ostida turgan idishlar sirtiga ta'sir qiluvchi kuchlarni, harorat oqimlarini, elektromagnit kuchlarni, gazlar oqimini, issiqlik yoki energiya taqsimotini aniqlash mumkin. Bu matematik yondashuv nafaqat nazariy fizikada, balki aerodinamika, issiqlik texnikasi, mexanika, materialshunoslik, elektrotexnika va boshqa ko'plab fanlar sohasida real muammolarni yechishda qo'llaniladi.

Ushbu maqolada sirt integrallarining muhim amaliy tatbiqlari to'rt xil real soha misolida ko'rib chiqiladi:

1. Sferik ballon sirtida bosim tomonidan bajariladigan ishni hisoblash. Bu masalada sirtga ta'sir qiluvchi doimiy bosim kuchi ostida bajarilgan mexanik ish sirt integrali yordamida hisoblanadi. Ushbu model yuqori bosimli sanoat konteynerlari xavfsizlik dizaynida muhim ahamiyatga ega.

2. Sferik idish orqali harorat oqimini hisoblash. Bu masala issiqlik muhandisligi sohasiga oid bo'lib, gazli sferik konteyner ichidagi issiqlik oqimining sirt orqali chiqishini baholash uchun sirt integralidan foydalanishni ko'rsatadi. Bu usul energiya samaradorligini tahlil qilishda qo'llaniladi.

3. Elektrostatik sferik maydon kuchlanganligini Gauss teoremasi yordamida sirt orqali hisoblash. Bu masala elektrostatika qonunlarini chuqur tushunishga asos bo'lib, kuchlanganlik vektorining sferik sirt orqali oqimini aniqlash orqali elektr zaryadlarning taqsimotini tahlil qiladi.

4. Suyuqlik oqimining sirt orqali umumiy oqimini aniqlash. Bu masala gidrodinamika va oqimlar nazariyasida keng qo'llanilib, berilgan sirt orqali o'tuvchi suyuqlikning umumiy miqdorini sirt integrali yordamida hisoblaydi.

Mazkur masalalarning barchasi sirt integrali kontseptsiyasi, vektor maydonlarning sirt bilan o'zaro ta'siri, normal vektorlar, oqim va ish kabi fizik tushunchalarning matematik ifodalanishini o'z ichiga oladi. Sirt integrallari orqali olingan natijalar texnologik qurilmalarning samaradorligini oshirish, xavfsizligini ta'minlash va energiya tejamkorligini aniqlashda muhim rol o'ynaydi.

Bu maqolada har bir masala ilmiy asoslangan holda matematik model orqali yechilgan bo'lib, har bir natija real muammoga mos yondashuv bilan ko'rsatiladi. Analitik hisoblashlar, geometrik talqin va fizik interpretatsiyalar integrallarning amaliy qiymatini chuqur yoritishga xizmat qiladi.

Uch o'lchamli fazoda modellashirilgan fizik tizimlarda bosim ostidagi muhitning sirtga ta'siri natijasida bajariladigan ish muhim energetik parametr hisoblanadi. Ayniqsa, sferik shakldagi idishlar masalan, gaz ballonlari, kriogen tanklar, portlovchi moddalar saqlanadigan rezervuarlar ichki bosimga bardosh bera oladigan tarzda ishlab chiqiladi. Bunday holatlarda bosim ostida sirtga ta'sir qiluvchi kuchlar tomonidan bajarilgan umumiy ishni aniqlash sirt integrallari yordamida amalga oshiriladi.

Differensial geometriyada sirt integrali quyidagi ko'rinishda aniqlanadi:

$$W = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$$

Bu yerda

W – sirt bo'ylab bajarilgan ish; $\vec{F}$ – sirtga perpendikulyar yo'nalgan kuch vektori; $\vec{n}$ birlik normal vektor sirtga tashqariga yo'nalgan dS – sirtning differensial elementi.

Agar bosim doimiy bo'lsa, masalan $p(x, y, z) = p_0$, u holda kuch vektori har bir nuqtada quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{F} = -p_0 \vec{n}$$

Bu yerda minus ishorasi bosim kuchi har doim sirtga ichkaridan tashqariga normal yo'nalishda qarama-qarshi ta'sir qilishini ifodalaydi. Bu holda ish quyidagicha yoziladi:

$$W = \iint_S (-p_0 \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} ds = -p_0 \iint_S 1 ds$$

Normal vektor o'zining kvadrat moduliga ega bo'lib, u 1 ga teng $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$. Shuning uchun ifoda sirt yuzasi maydoniga ko'paygan doimiy qiymatga teng bo'ladi:

$$W = -p_0 \cdot S$$

Agar sirt radiusi R bo'lgan sfera bo'lsa, u holda uning sirt maydoni $S = 4\pi R^2$ ga teng. Demak, yakuniy formulamiz:

$$W = -p_0 \cdot 4\pi R^2$$

Bu formula orqali bosim ta'sirida bajariladigan ish to'g'ridan - to'g'ri sferaning sirt maydoni va bosim qiymatiga bog'liq bo'ladi. Amalda bu yondashuv sanoat tizimlaridagi yuqori bosimli idishlar dizayni, bosimni bardoshlilik chegarasi, xavfsizlik koeffitsienti va material tanloviga oid muhim hisob-kitoblarda qo'llaniladi.

Bosim p_0 doimiy bo'lib, sirtga doimiy kuch ta'sir etadi. Sfera sirtining har bir nuqtasida bu kuch normal yo'nalishda yo'naltirilgan bo'ladi. Bajarilgan ish bu kuchlarning sirt bo'ylab integrallangan umumiy ta'sirini ifodalaydi. Manfiy ishora ishning tashqi muhitga qarshi bajarilishini yoki energiya sarfini bildiradi.

Bu nazariy tahlil gaz saqlanadigan idishlar, suv osti bosim kapsulalari, portlovchi muhitlar bilan ishlovchi rezervuarlar kabi tizimlarda konstruktiv va xavfsizlikka doir muhim dizayn ko'rsatkichlarini aniqlashda amaliy ahamiyatga ega. Shuningdek, bu yondashuv dizaynda ishonchlilikni oshirish, materialning mexanik kuchlarini baholash va ekstremal holatlarni prognozlash imkonini beradi.

Zamonaviy issiqlik muhandisligida energiya uzatish, issiqlik tarqalishi va issiqlik oqimi muammolari har qanday termodinamik tizimda hal qilinishi zarur bo'lgan asosiy masalalardan biridir. Issiqlik oqimi modellashtirilayotgan fazoning chegara sirtidan qanday tarzda o'tayotganini aniqlash ko'plab amaliy sohalar quvurlar tizimi, issiqlik almashinuvchilar, yadro energiyasi qurilmalari, kriogen texnologiyalar, binolarni issiqlik izolyatsiyalash, va aerokosmik tizimlar uchun muhim ahamiyat kasb etadi.

Harorat oqimini matematik ifodalashda sirt integrallari muhim rol o'ynaydi. Ular sirt orqali vektor maydonning oqimini (ya'ni energiya, massa yoki kuch oqimini) aniqlash imkonini beradi. Issiqlik oqimi uchun vektor maydon quyidagi fizik qonunlarga asoslanadi:

$$\vec{q}(x, y, z) = k \cdot \vec{r}$$

bu yerda: $\vec{q}$ – harorat issiqlik oqimi vektori; k issiqlik oqimi zichligi koeffitsiyenti konstant;

$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ – radius - vektor markazdan berilgan sirt nuqtasigacha bo'lgan vektor.

Bu modelda issiqlik oqimi har doim sferaning markazidan tashqariga, ya'ni radius yo'nalishida sodir bo'ladi. Bu fizik jihatdan ham to'g'ri, chunki issiqlik ichki qizigan sohalardan tashqi sovuq sohalarga harakat qiladi.

Agar sirt sfera bo'lsa:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

unda har bir nuqtadagi birlik normal vektor sferaning markazidan tashqariga yo'nalgan radius vektor bilan bir yo'nalishga ega:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}}{R}$$

Sirt orqali issiqlik oqimi quyidagicha aniqlanadi:

$$Q = k \iint_S R ds = k \cdot R \cdot 4\pi R^2 = 4\pi k R^3$$

Ammo siz berilgan formulada $\vec{q} = k \cdot \vec{r}$, $\vec{r} \cdot \vec{n} = R$, va sirt maydoni $S = 4\pi R^2$ deb olinib, yakuniy formula quyidagicha yozilgan:

$$Q = k \cdot 4\pi R^2$$

Bu modelda $\vec{r} \cdot \vec{n} = 1$ deb qabul qilingan bo'lishi mumkin, ya'ni $\vec{r}$ –normallashtirilgan vektor, yoki $\vec{q} = k \cdot \vec{n}$ deb yozilgan holda. Sferik idish orqali chiqayotgan issiqlik oqimi to'g'ridan-to'g'ri sirt maydoniga va oqim zichligiga bog'liq. Ushbu integral orqali aniqlangan qiymat quyidagilarni aniqlash imkonini beradi:

Energiya balansini aniqlash; issiqlik yo'qotilishini baholash; sirtni izolyatsiyalash samaradorligini aniqlash; yuqori haroratli muhitda xavfsizlik chegaralarini belgilash; issiqlik tejamkorlik choralarini takomillashtirish.

Bunday usul sanoat pechlari, energetik qurilmalar, kriogen saqlash sistemalari, termal kameralar, va boshqa issiqlik sezgir tizimlar uchun zamonaviy issiqlik nazoratining matematik poydevorini tashkil etadi.

Sferik sirt orqali harorat oqimini sirt integrali orqali aniqlash - bu fizika va muhandislik sohalarida issiqlik jarayonlarini modellashtirish va boshqarish uchun ishonchli usuldir. Ushbu nazariy model real issiqlik tizimlarini matematik jihatdan tahlil qilish, ularning samaradorligini oshirish va energiya tejamkorligini ta'minlash uchun zarur analitik asboblardan biridir.

Elektrostatik hodisalar elektr zaryadlar atrofida hosil bo'ladigan maydonlarni o'rganadi. Ushbu maydonlar elektr kuchlanganlik vektori orqali ifodalanadi va ularning sirt orqali umumiy oqimi ko'plab texnik qurilmalarda kondensatorlar, dielektriklar, zaryadli zarrachalar tizimi, yuqori kuchlanishli qurilmalar ishlash prinsiplarini tushunishda asosiy o'rinni egallaydi. Aynan shunday sirt orqali maydon oqimini aniqlashda Gauss teoremasi, ya'ni divergensiya teoremasi, kuchli matematik vosita sifatida qo'llaniladi.

Elektrostatik kuchlanganlik va sirt oqimi. Biror muhitda Q miqdoridagi nuqta zaryad berilgan bo'lsa, undan hosil bo'lgan elektrostatik kuchlanganlik vektor maydoni vakuumda quyidagicha ifodalanadi:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot \vec{r}$$

Bu yerda:

Q – nuqta zaryad miqdori; ε_0 – elektr doimiysi elektrostatik muhitning dielektrik doimiysi; $\vec{r}$ – sferik koordinatalarda radius vektor;

$R = |\vec{r}|$ radius (zaryaddan sirtgacha bo'lgan masofa).

Bu maydon har bir nuqtada zaryaddan tashqariga yo'nalgan bo'ladi va sferik simmetriyaga ega.

Sirt orqali elektr maydon oqimi. Elektrostatik kuchlanganlik vektorining sferik sirt orqali oqimi sirt integrali yordamida aniqlanadi:

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} ds$$

Bu yerda $\vec{n}$ sferaning tashqariga qaragan birlik normal vektori. Gauss teoremasiga binoan, ushbu integral hosil bo'lgan elektrostatik maydonning divergentsiyasi orqali hajm integraliga bog'lanadi:

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dV$$

Bu yerda, $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ u holda $\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

bu yerda ρ – hajmiy zaryad zichligi.

Agar sfera ichida bitta Q zaryad bo'lsa, bu hajmiy zaryad zichligi orqali ifodalanib, Gauss teoremasi quyidagicha soddalashadi:

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Bu natija Gaussning elektrostatik qonuni sifatida mashhur bo'lib, sfera radiusi qancha katta bo'lishidan qat'i nazar, agar butun zaryad sfera ichida joylashgan bo'lsa, sirt orqali elektr oqimi faqat zaryadga bog'liq bo'ladi.

Bu qonun quyidagi muhim fizik holatlarni tahlil qilishda qo'llaniladi. Elektr zaryadlarning izolyatsiyalovchi dielektrik materiallar ichidagi ta'siri; yuqori kuchlanishli elektr maydonlarda sirt oqimi kuchlanish darajasini aniqlash; kondensator plastinkalar orasidagi maydon kuchi; yopiq sirtlar orqali zaryadlarning umumiy ta'sirini matematik ifodalash.

Bu metod zaryadlarning joylashuviga bog'liq bo'lmagan umumiy maydon xususiyatlarini aniqlash imkonini beradi va zaryadning o'zi, emas, balki uning umumiy oqimdagi o'rnini aniqlash uchun kuchli matematik vositadir.

Elektrostatik kuchlanganlikni sferik sirt orqali hisoblashda Gauss teoremasining qo'llanilishi bu fizik jarayonlarning matematik soddalashtirilgan, ammo aniq modelini beradi. Ushbu uslub ko'plab elektrotexnika va elektrostatik loyihalashda, ayniqsa, elektr maydonlarni tahlil qilishda va qurilmalarning optimal dielektrik izolyatsiyasini yaratishda beqiyos ahamiyat kasb etadi.

Muhandislik, gidravlika va texnologik tizimlar tahlilida suyuqlik oqimining yo'nalishi, tezligi va umumiy miqdorini aniq hisoblash dolzarb masalalardan biridir. Ayniqsa, yopiq yoki ochiq sirt orqali o'tuvchi suyuqlik hajmini aniqlash turli texnologik qurilmalarning samaradorligini baholashda muhim rol o'ynaydi. Suyuqliklar harakati bo'yicha fundamental

qonunlar Navye-Stoks tenglamalari, massa saqlanish qonuni va oqimlar nazariyasi jarayonlarni to'g'ri modellashtirish va tahlil qilish uchun asos yaratadi.

Sirt orqali o'tuvchi umumiy suyuqlik miqdorini hisoblashda matematik vosita sifatida sirt integrallari ishlatiladi. Sirt integrali orqali suyuqlikning har bir sirt elementiga perpendikulyar yo'nalgan tezlik komponenti yig'indisi aniqlanadi. Bu yondashuv, ayniqsa, radial simmetriyaga ega bo'lgan tizimlarda, masalan, sferik rezervuarlar, quvurlar tutashgan klapanlar, havo yoki gaz oqim tizimlari uchun juda qulay va aniq natijalarni beradi.

Sferik simmetriyaga ega masalalarda oqim vektori $\vec{v}(x, y, z) = a\vec{r}$ shaklida ifodalanadi. Bu yerda $\vec{r}$ nuqtaning sferaning markazidan radius vektori, a oqim intensivligini belgilovchi konstantadir. Ushbu model suyuqlik oqimi to'g'ridan - to'g'ri markazdan tashqariga yoki ichkariga yo'nalgan holatlarni matematik jihatdan soddalashtiradi va tabiiy harakatning fizik mohiyatini aks ettiradi.

Suyuqlik oqimi quyidagi sirt integral orqali aniqlanadi:

$$Q = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} ds$$

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar integral hisobining muhim bo'limi bo'lgan sirt integrallari real fizikaviy va muhandislik muammolarini chuqur matematik tahlil qilishda kuchli vosita hisoblanadi. Ushbu maqolada sirt integrallarining to'rtta fundamental amaliy qo'llanilishi: bosim ta'sirida bajariladigan mexanik ish, sferik sirt orqali issiqlik oqimi, elektrostatik kuchlanganlikning sirt oqimi va umumiy suyuqlik oqimi kabi holatlar asosida o'rganildi. Har bir masala uch o'lchanli fazodagi vektor maydonlar, normal vektorlar, sirt elementlari va mos matematik modellarga tayanib ilmiy asoslangan tarzda yechildi.

Tahlillar natijasida aniqlanishicha, sirt integrallari yordamida murakkab fizik tizimlardagi energiya, kuch va oqim muammolarini soddalashtirilgan va aniq formulalar orqali ifodalash imkoniyati mavjud. Bu yondashuv yuqori bosimli sanoat idishlarining xavfsizligini baholashda, issiqlik almashinuvi samaradorligini tahlil qilishda, elektrostatik tizimlarning zaryad taqsimotini o'rganishda va suyuqlik oqimini aniqlashda muhim rol o'ynaydi. Ayniqsa, sferik simmetriyali tizimlarda sirt integrallari orqali olingan natijalar tahliliy ifoda va amaliy yondashuvni o'zaro uyg'unlashtiradi.

Xulosa qilib aytganda, sirt integrallarining amaliy modellardagi qo'llanilishi nafaqat nazariy bilimlarni chuqurlashtiradi, balki real muammolarga yechim topishda, texnologik qurilmalarni loyihalashda, energiya samaradorligini oshirishda va tizim xavfsizligini ta'minlashda beqiyos ahamiyat kasb etadi. Kelgusidagi ilmiy izlanishlarda bu yondashuvlarni boshqa shakldagi sirtlar uchun umumlashtirish, dinamik tizimlarga tatbiq etish va raqamli modellashtirish asosida yanada chuqurlashtirish istiqbollari mavjud.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Mamatov M., Shermatov A., Jo'rayev U. *Oliy matematika. 2-kitob. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi va amaliyotlari.* – Toshkent: Fan va texnologiya, 2020. - 320 b.

2. Ibragimov M.M. Matematik analizning fizikaga tadbiqlari. - Toshkent: TDPU nashriyoti, 2018.

3. Milojević P. Applications of Surface Integrals in Electromagnetics and Fluid Mechanics. - Journal of Applied Mathematics and Physics, Vol. 5, 2017.