

EGRI CHIZIQLI INTEGRALNING ELEKTROMEXANIK TIZIMLARDAGI AMALIY
QO'LLANILISHI

Ismoilova Zamira Tuxtayevna

*Navoiy davlat konchilik va texnologiyalar universiteti,
Oliy matematika va axborot texnologiyalari kafedrası katta o'qituvchi*

Annotatsiya. *Ushbu maqolada elektromagnit maydonlarda zaryadli zarralarning harakati natijasida bajarilgan ishni tahlil qilish egri chiziqli integrallar asosida ko'rib chiqiladi. Ayniqsa, magnit maydon ostida harakatlanayotgan zarra uchun bajarilgan ish, energiya va elektr yurituvchi kuch (EMK) matematik jihatdan ikkinchi tur egri chiziqli integral orqali aniqlanadi. Maqolada yarim ellips shaklidagi trayektoriya bo'ylab magnit kuch maydonida harakat qilayotgan zaryad modeli tahlil qilinadi hamda Faradey qonunining matematik asoslari keltiriladi. Shuningdek, vaqtga bog'liq magnit maydon ostida yopiq konturdagi elektr yurituvchi kuch integral orqali hisoblanadi. Tadqiqot natijalari elektromexanik tizimlar (generator, transformator va elektromagnit qurilmalar) samaradorligini baholashda egri chiziqli integralning amaliy ahamiyatini ko'rsatadi.*

Annotation. *This paper analyzes the work done by charged particles moving in an electromagnetic field using line integrals of the second kind. Specifically, it investigates how the motion of a particle in a magnetic field results in mechanical work, energy transfer, and electromotive force (EMF), which are mathematically expressed through line integrals. The study explores a case of a particle moving along a semi-elliptical path within a rotational magnetic field and provides a mathematical explanation of Faraday's law of induction. Additionally, it demonstrates the calculation of induced EMF in a circular coil subjected to a time-varying magnetic field using vector line integrals. The results emphasize the practical importance of such integrals in evaluating the performance of electromechanical systems, including generators, transformers, and electromagnetic actuators.*

Kalit so'zlar. *Egri chiziqli integral, elektromagnit maydon, zaryadli zarra, magnit kuch, Faradey qonuni, elektr yurituvchi kuch, energiya almashinuvi, elektromexanik tizim, aylanishli maydon, induksiya, transformator, generator, simli o'ram, magnit induksiya*

Keywords. *line integral, electromagnetic field, charged particle, magnetic force, Faraday's law, electromotive force, energy transfer, electromechanical system, rotational field, induction, transformer, generator, wire loop, magnetic induction*

Elektromagnit maydonlarda zaryadli zarra harakatining energiyasini tahlil qilish fizikada va muhandislikda keng qo'llaniladigan muammo hisoblanadi. Ayniqsa, magnit kuchlar maydonida zarra harakati davomida bajarilgan ishni aniqlash orqali elektr dvigatellar, generatorlar va elektromagnit aktuatorlarning samaradorligini baholash mumkin. Ushbu muammo matematik jihatdan ikkinchi tur egri chiziqli integral orqali hal qilinadi, bu esa vektor maydon bilan egri chiziqli yo'l orasidagi skalyar proyeksiyaga asoslanadi. Egri chiziqli integrallar matematik analiz va fizikada muhim o'rin egallaydi.

Ular yordamida vektor maydonlarda zarralar tomonidan bajarilgan ish, energiya yoki oqimlar aniqlanadi. Ayniqsa, magnit yoki elektr maydonlarda zaryadli zarralarning harakati

tahlili egri chiziqli integrallar orqali ifodalanadi. Bu integral ayniqsa elektromexanik tizimlar, elektr dvigatellar va elektromagnit qurilmalarning energiya baholashida katta ahamiyatga ega.

Mazkur maqolada aylanishli magnit maydon ostida yarim ellips shaklidagi o'tkazuvchi sim bo'ylab zaryad harakati natijasida bajarilgan ish ikkinchi tur egri chiziqli integral yordamida aniqlanadi.

$$\int_{\Gamma} \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

$F(x, y)$ – ikki o'lchovli vektor maydon; $\vec{r}(t)$ egri chiziqlarning parametrik tenglamasi; Γ – zarra harakatlanayotgan yo'l egri chiziq; $\vec{F} d\vec{r}$ vektor maydonning harakat yo'nalishi bo'ylab skalyar proyeksiyasi.

Bu integral vektor maydon tomonidan zarra yo'nalishi bo'yicha bajarilgan ishni ifodalaydi.

Masala. Faraz qilaylik, gorizontaldan pastga qaragan yarim ellips shaklidagi o'tkazuvchi sim quyidagicha parametrik berilgan:

$$\begin{cases} x(t) = acost \\ y(t) = bsint \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

bu yerda $a, b > 0$ – ellipsning yarim o'qlari.

Sim magnit kuch maydoniga joylashtirilgan. Vektor maydon quyidagicha berilgan:

$$F(x, y) = (-ky, yx), \quad k > 0$$

Bu kuch maydoni aylanishli vektor maydon bo'lib, fizikaviy ma'noda zarra harakatiga ta'sir qiluvchi magnit kuchni bildiradi. Bu maydon, aylanishli magnit maydonning ikki o'lchovli modelidir.

Sim bo'ylab harakatlanayotgan biror zaryad uchun ushbu magnit kuch tomonidan bajarilgan ishni aniqlang.

Yechish. Parametrik tenglamalar va harakat vektori zarra harakatlanayotgan yo'l quyidagicha ifodalangan.

$$\vec{r}(t) = (acost, bsint) \quad t \in [0, \pi]$$

Bu vektor t vaqtga bog'liq bo'lib, u vaqt o'tishi bilan o'zgaradi.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-asint, bcost)$$

Bu harakat vektorining hosilasi, ya'ni harakat tezligining vaqt bo'yicha o'zgarishidir. Boshqacha aytganda, bu zarra ayni paytda qanday yo'nalishda harakat qilayotganini bildiradi.

Maydon vektorining ifodasi parametrik shaklda. Bu fizik kuch maydonidir, ya'ni har bir nuqtada vektor mavjud:

$$F(x(t), y(t)) = (-k \cdot bsint, k \cdot a \cdot acost)$$

bu yerda vektor maydon $\vec{F}$ bilan harakat vektori $\frac{d\vec{r}}{dt}$ (egri chiziq ustidagi har bir nuqtada chiziqqa urunuvchi vektor) bo'ladi.

Demak, bu vektor trayektoriya ustidagi zarra qayerga qarab harakat qilayotganini bildiradi, ya'ni bu egri chiziq ustida turgan zarra yoki nuqta harakat qilayotgan aniq yo'nalishni ko'rsatadigan chiziq.

Bu qiymat vektor maydon tomonidan harakat yo'nalishiga proyeksiyalangan kuchning miqdorini bildiradi ya'ni bu fizik jihatdan ishning tezlik bo'yicha zarraga ta'sir etayotgan kuch komponentasi.

$$\bar{F} \frac{d\bar{r}}{dt} = (-k \cdot b \cdot \sin t) \cdot (-a \sin t) + (k \cdot a \cdot \cos t)(b \cdot \cos t) == k \cdot a \cdot b(\sin^2 t + \cos^2 t)$$

$$\bar{F} \frac{d\bar{r}}{dt} = k \cdot a \cdot b$$

Vektor maydon ya'ni magnit kuch zarra trayektoriyasi bo'ylab doimiy miqdorda ish bajaradi.

Har qanday vaqt momentida, bu kuch harakat yo'nalishiga eng katta proyeksiyalangan ish tezligini beradi. Bu kuch bilan zarra yo'nalishining mosligi sababli, skalyar ko'paytma doimiy qiymat beradi ya'ni $k \cdot a \cdot b$ har doim bir xil.

Zarra $t = 0$ dan $t = \pi$ gacha bo'lgan vaqt ichida yarim ellips shaklidagi egri chiziq bo'ylab harakat qiladi. Har bir nuqtada unga aylanishli vektor maydoni tomonidan kuch ta'sir qiladi: bu kuch harakat yo'nalishiga to'g'ri yo'nalgan. Shuning uchun, har lahzada zarra kuchdan maksimal darajada ish oladi. yakuniy ish $W = k \cdot a \cdot b$ ga teng bo'lib, bu maydon tomonidan harakatga sarflangan energiya miqdorini bildiradi.

Bu natija magnit kuchning o'ziga xos xususiyatlarini aks ettiradi: agar magnit maydon potensial bo'lganida,

$$\nabla \times \bar{F}. \text{rot} \bar{F} = \nabla \times \bar{F} = 2k \neq 0;$$

shuning uchun zarra harakati davomida ish bajariladi. Bu misol shuni ko'rsatadiki, egri chiziqli integrallar orqali fizik jarayonlarda energiya almashinuvi, kuchlar bilan o'zaro ta'sirlarni matematik tarzda aniqlash mumkin.

Elektrotexnika, energetika va muhandislik sohalarida o'zgaruvchan magnit maydonlar asosida ishlovchi qurilmalar, masalan, transformatorlar, generatorlar va elektromagnit induktorlar keng qo'llaniladi. Bu qurilmalarning ishlash prinsipi Faradey induksiya qonuni bilan bevosita bog'liq bo'lib, bu qonun elektr yurituvchi kuch (EMK) ning hosil bo'lishini izohlaydi.

Mazkur qonun matematik jihatdan ikkinchi tur egri chiziqli integral yordamida ifodalanadi. Ikkinchi tur egri chiziqli integral vektor maydonning ma'lum egri chiziq trayektoriya bo'yicha bajaradigan ishini yoki kuchni ifodalaydi:

$$\int_{\Gamma} \bar{F} d\bar{r} = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \frac{d\bar{r}}{dt} dt$$

Bu yerda:

$\bar{F}$ –vektor maydon masalan, kuch yoki elektr maydoni,

$\bar{r}(t)$ – egri chiziq parametrik shaklda, Γ – zarraning harakat yo'li.

Faradey qonunining matematik ifodasi:

$$\varepsilon = \oint_{\Gamma} \bar{E} d\bar{r}$$

Bu yerda

ε – induksiyalangan elektr yurituvchi kuch; $\vec{E}$ – o'zgaruvchan magnit maydon ostida hosil bo'lgan elektr maydon vektori, Γ – o'ram yo'li yoki kontur yo'li; $d\vec{r}$ – kontur bo'ylab egri chiziqli element;

Faradey qonuni shuni bildiradiki, magnit maydon o'zgarayotganda, yopiq kontur masalan, simli o'ramda elektr tok hosil bo'ladi. Bu tok kontur bo'ylab EMK tomonidan hosil qilinadi.

Agar magnit induksiya maydoni vaqt bo'yicha o'zgarayotgan bo'lsa, uning oqimi:

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

bo'lib, EMK quyidagicha ifodalanadi:

$$\varepsilon = \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Ammo elektr kuchlanganlik maydoni E induksiyalangan bo'lsa, egri chiziqli integral orqali EMKni topish mumkin:

$$\varepsilon = \oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{r}$$

Bu yerda E magnit maydonning o'zgarishi tufayli induksiya bo'yicha yuzaga kelgan elektr maydon.

Masala. Tayyorlangan simli o'ram aylana shaklida yopiq kontur bo'lib, radiusi R ga teng. Kontur xy -tekisligida yotadi. Magnit induksiya maydoni $\vec{B}(t) = B_0 \cdot t \hat{k}$

shaklida bo'lib, vaqtga chiziqli bog'liq. Ya'ni magnit maydon har soniyada bir xil tezlikda kuchayadi va doimo z -o'qi bo'ylab yo'nalgan bo'ladi.

Kontur tenglamasi:

$$r(t) = R \cdot \cos t \cdot \hat{i} + R \cdot \sin t \cdot \hat{j}; \quad t \in [0; 2\pi]$$

Faraz qilamizki, induksiyalangan $\vec{E}$ vektori aylana bo'ylab yo'nalgan (aylanishli maydon), shaklan:

Egri chiziqli integral orqali EMK:

$$\varepsilon = \oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \varepsilon(R) R d\theta = 2\pi R \varepsilon(R)$$

Faradey qonuni asosida EMK:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{d}{dt} \int_S B(t) d\vec{s} = -\frac{d}{dt} (B_0 t + \pi R^2) = -B_0 \pi R^2 \\ 2\pi R \cdot \varepsilon(R) &= -B_0 \pi R^2 \\ \varepsilon(R) &= -\frac{1}{2} B_0 R; \end{aligned}$$

Bu tahlildan ko'rinib turibdiki:

Egri chiziqli integral yordamida elektr maydonning yopiq kontur bo'ylab ish bajarish qobiliyati (ya'ni EMK) aniqlanadi. Bu integral fizikadagi energiya almashinuvi va maydonlararo o'zaro ta'sir mexanizmlarini ifodalaydi. Faradey qonuni o'zgaruvchan magnit maydon hosil qilgan aylanishli elektr maydonni tavsiflaydi. Bunday integral formulalar real qurilmalarning samaradorligini baholashda ishlatiladi.

Faradey qonuni va egri chiziqli integral bir-biriga to'g'ridan-to'g'ri bog'liq bo'lib, fizikadagi induksiya jarayonini matematik tahlil qilish imkonini beradi. Bu integral o'zgaruvchan magnit maydonlar ostida zaryadlarning harakati, energiya almashinuvi va kuchlarning yo'l bo'ylab ta'sirini ifodalashda hal qiluvchi vositadir. Shu asosda elektromexanik qurilmalarning ish samaradorligi aniqlanadi, modellashtiriladi va loyihalanadi.

Elektromagnit maydonlardagi zaryadli zarralar harakatini tahlil qilish fizikadagi asosiy muammolardan biri bo'lib, uning yechini vektor analiz, xususan, ikkinchi tur egri chiziqli integral yordamida aniqlanadi. Ushbu maqolada aynan egri chiziqli integralning elektromagnit kuch maydonida bajarilayotgan ishni, energiya almashinuvi va elektr yurituvchi kuch (EMK) ni matematik ifodalashdagi roli chuqur yoritildi.

Yarim ellips shaklidagi trayektoriya bo'ylab harakatlanayotgan zaryad uchun magnit kuch maydonida bajarilgan ish doimiy bo'lib, bu vektor maydon bilan harakat trayektoriyasi orasidagi skalyar proyeksiyaning doimiylikiga asoslanadi. Bu esa, magnit kuchlarning potensial bo'lmagan (ya'ni, rotatsiyali) xususiyatini namoyon etadi.

Bundan tashqari, Faradeyning elektromagnit induksiya qonuni egri chiziqli integral yordamida ifodalanishi ko'rsatildi. Vaqtga bog'liq magnit maydon ostida yopiq konturda hosil bo'ladigan EMK quyidagi formula bilan ifodalanadi:

Bu tahlillar shuni ko'rsatadiki, egri chiziqli integrallar fizikadagi real jarayonlarni modellashtirish va ularda energiya almashinuvi yoki ish bajarilishini baholashda kuchli matematik vosita hisoblanadi. Xususan, elektromexanik qurilmalargeneratorlar, transformatorlar, elektromagnit aktuatorlar ning samaradorligini tahlil qilishda bu integral turlarining ahamiyati katta.

Shuningdek, aylanishli (rotatsiyali) magnit maydonlar ostida hosil bo'ladigan induksiyalangan elektr maydonlar aynan yopiq egri chiziqli integrallar orqali tavsiflanadi. Bu fizik qonunlarning matematik ifodalanishi fizikadagi nazariy modellashtirish va texnologik qurilmalarni loyihalashda hal qiluvchi ahamiyatga ega.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

4. Mamatov M., Shermatov A., Jo'rayev U. *Oliy matematika. 2-kitob. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi va amaliyotlari.* – Toshkent: Fan va texnologiya, 2020. - 320 b.
5. Ibragimov M.M. Matematik analizning fizikaga tadbirlari. - Toshkent: TDPU nashriyoti, 2018.
6. Milojević P. Applications of Surface Integrals in Electromagnetics and Fluid Mechanics. - Journal of Applied Mathematics and Physics, Vol. 5, 2017.