MATRITSA STRUKTURASI VA UNING ALGEBRAIK ELEMENTLARI ASOSIDA TIZIMLARNI TAHLIL QILISH VA BARQARORLIK SHARTLARINI ANIQLASH

Abdullayeva Dildora Anvarovna
Navoiy davlat konchilik va texnologiyalar universiteti,
Oliy matematika va axborot texnologiyalari kafedrasi katta o'qituvchi

Annotatsiya. *Ushbu maqolada matritsa strukturasi, determinanti, minorlar va algebraik to‘ldiruvchilarning nazariy asoslari va ularning murakkab tizimlarni modellashtirishdagi roli tahlil etiladi. Tadqiqotda ayniqsa determinanti nolga teng bo‘lmagan matritsalar asosida real tizimlarning barqarorligi, boshqariluvchanligi va o‘zaro bog‘liqligi matematik asosda yoritiladi. Minor va algebraik to‘ldiruvchilar yordamida chiziqli tenglamalar tizimlarining yechimlari, teskari matritsaning mavjudlik shartlari hamda ularning iqtisodiy, biologik va texnik tizimlardagi amaliy tatbiqlari ko‘rib chiqiladi. Grafik transformatsiyalar, Leontyev modeli, Leslie modeli va elektr zanjirlari misolida algebraik elementlarning strukturaviy yechimdagi o‘rni aniq ko‘rsatiladi. Maqolada keltirilgan natijalar matritsalar nazariyasining nafaqat matematik, balki tarmoqlararo tadqiqot va amaliy faoliyatda muhim vosita ekanligini tasdiqlaydi.*

Annotation. *This article explores the theoretical foundations of matrix structure, determinants, minors, and algebraic cofactors, and their role in modeling complex systems. The study focuses particularly on matrices with non-zero determinants to mathematically assess system stability, controllability, and interdependence. Using minors and cofactors, the solutions of linear systems, the conditions for the existence of inverse matrices, and their applications in economic, biological, and engineering systems are examined in detail. Real-world models such as graphical transformations, the Leontief economic model, the Leslie population model, and electrical circuits are used to demonstrate the structural significance of these algebraic components. The results presented in the article confirm that matrix theory serves as a powerful tool not only in mathematics but also in interdisciplinary research and practical implementations.*

Kalit so‘zlar: *matritsa nazariyasi, determinant, minor, algebraik to‘ldiruvchi, teskari matrisa, chiziqli tenglamalar tizimi, Leontyev modeli, Leslie modeli, grafik transformatsiyalar, elektr zanjirlar, matematik modellashtirish, tizim tahlili, fanlararo tadbiq.*

Keywords: *matrix theory, determinant, minor, algebraic cofactor, inverse matrix, system of linear equations, Leontief model, Leslie model, graphical transformations, electrical circuits, mathematical modeling, system analysis, interdisciplinary application.*

Matematik modellashtirish metodlarining murakkablashib borishi bilan bir qatorda, chiziqli algebra tushunchalarining amaliyotdagi roli tobora ortib bormoqda. Ayniqsa, determinantlar nazariyasiga asoslangan minorlar va algebraik to‘ldiruvchilar tushunchasi ko‘p o‘zgaruvchili tizimlarning ichki tuzilmasini chuqur tahlil qilishda muhim vosita sifatida maydonga chiqmoqda. Minorlar bu matritsaning kichik o‘lchamli determinantlari bo‘lib, ular umumiy determinanti aniqlashda asosiy bloklar rolini bajaradi. Algebraik to‘ldiruvchilar esa har bir matritsa elementi bilan bog‘liq bo‘lgan minorlar asosida aniqlanib, teskari matritsani topish, determinantning rivojlanish formulalarini yozish va chiziqli tenglamalar tizimining yechimlarini tahlil qilishda hal qiluvchi ahamiyat kasb etadi.

Fan va texnikaning turli yo‘nalishlarida fizika, iqtisodiyot, muhandislik, biologiya, kompyuter fanlarida murakkab tizimlarni modellashtirish ehtiyoji tufayli matritsalar asosida ishlovchi modellar keng tatbiq etilmoqda. Bunday modellar ichida minor va algebraik to‘ldiruvchi kabi elementlarning roli, ayniqsa, teskari matritsa mavjudligini aniqlash, tizimning barqarorlik shartlarini tekshirish va strukturaviy o‘zaro ta’sirlarni aniqlashda beqiyosdir. Ushbu maqolada minorlar va algebraik to‘ldiruvchilarning nazariy asoslari bilan birga, ularning turli fanlarda qanday amaliy vazifalarni bajarishi, qanday hisoblash mexanizmlari orqali natijalarga olib borishi batafsil yoritiladi.

Mazkur uslub, ayniqsa, integrallashgan tizimlar iqtisodiy balans, elektr zanjirlar, grafik transformatsiyalar, populyatsiya dinamikasi va neyron tarmoq algoritmlarida chuqur tahlil vositasi bo‘lib xizmat qiladi. Kirish bo‘limi sifatida, biz minor va algebraik to‘ldiruvchilar orqali matematik modellashtirishda qanday aniqlik, izchillik va fizikaviy yondashuvlar paydo bo‘lishini ko‘rsatishga intilamiz.

Minorlar va algebraik to‘ldiruvchilar chiziqli algebra va matritsa nazariyasining asosiy tushunchalaridan bo‘lib, ular determinantlar nazariyasida, teskari matritsalarni topishda, chiziqli tenglamalar tizimini yechishda, geometrik transformatsiyalarda, fizik qonunlar va tizim tahlillarida asosiy hisoblash vositasi sifatida xizmat qiladi. Ayniqsa, ko‘p o‘zgaruvchili, murakkab tizimlarni modellashtirishda ularning o‘rni beqiyosdir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Matritsaning minorlari va algebraik to‘ldiruvchilarini toping.

Ychish. (bu misol yechimini Mathematica (dastur)da hisoblaymiz.) Buning uchun matritsaning quyi o‘ng burchagi asos qilib olinadi va quyidagi hisoblashlar bajariladi.

$$\begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31} & a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \\ a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} \\ a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

Bu hisoblashlar A kvadrat matritsaning 2x2 determinantlari yordamida hisoblanadi. Matritsaning algebraik to‘ldiruvchisi $C_{ij}=(-1)^{i+j}$ M_{ij}ga teng

$$\begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \\ a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} \\ a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

Hisoblashlar natijasida minorning ishorasi o‘zgaradi.

Algebraik to‘ldiruvchi va minorlar faqat ishorasi bilan farqlanishiga e’tibor berishimiz kerak $A_{ij}=\pm M_{ij}$. Algebraik to‘ldiruvchi va M_{ij} minorlar ishorasini aniqlashning eng oson usulu bu i – satr va j–ustunlarni shaxmat tartibida joylashtirish:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ + & - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Masalan, $c_{11}=M_{11}$, $c_{12}=-M_{12}$, $c_{22}=M_{22}$ va hokazo.

Umuman olganda determinant son bo‘ladi. Lekin ko‘p hollarda determinant determinantni hisoblagan matritsani ifodalash uchun ham ishlatiladi. SHunday qilib

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{1j}C_{1j} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

ga (2x2) determinant deb qarab, u determinantning 1-satri va 1-ustunidagi 3 elementi orqali chaqiriladi. Shu bilan birga quyidagi tasdiq o‘rinlidir: Determinatning qiymati uning ihtiyoriy satr yoki ustun elementlarining ularga mos algebraik to‘ldiruvchilarga ko‘paytmasining yig‘indisiga teng. Aytaylik (3x3) o‘lchovli A matritsa umumiy holda berilgan bo‘lsin

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$\det(A) = a_{11}M_{11} + a_{12}\left(-M_{12}\right) + a_{13}M_{13} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \ (3)$$

Shunday qilib, determinatni hisoblash uchun qandaydir ustun yoki satr elementlarining algebraik to‘ldiruvchilarini topib, ularni determinantning mos elementlariga ko‘paytmasining yig‘indisini hisoblash etarlidir.

Umumiy holda (nxn) o‘lchovli matritsaning determinanti quyidagicha hisoblanadi:

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n} \qquad (1)$$

(1) tenglik A matritsa algebraik to‘ldiruvchisining A matritsa 1 – satri bo‘yicha kengaytmasi deyiladi.

Yechish. Matritsaning minorlari va algebraik to‘ldiruvchilari quyidagicha topiladi

$$\begin{pmatrix} -4 & -11 & 12 \\ -2 & -6 & 7 \\ 3 & 9 & -10 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} -4 & 11 & 12 \\ 2 & -6 & -7 \\ 3 & -9 & -10 \end{pmatrix};$$

Keyin A matritsaning determinanti 1-satr elementlarini mos algebraik to‘ldiruvchilarga skalyar ko‘paytirish natijasida hosil qilinadi. Biz natijani Mathematica dasturidagi detA funksiyasi orqali tekshirib ko‘rishimiz mumkin. Buning natijasida shunga amin bo‘lamizki, algebraik to‘ldiruvchilar usuli bilan hisoblangan determinantning qiymati Mathematica da qo‘llanilgan usul bilan topilgan qiymatga teng ekan.

Agar A (3x3) o‘lchovli matritsa bo‘lsa, u holda uning determinanti algebraik to‘ldiruvchilar usuliga ko‘ra quyidagicha yoziladi:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}\right) =$$

$$= -a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33}$$

Shunga e'tibor berish kerakki har bir teng miqdordagi elementlar va ularning algebraik to'ldiruvchilari ixtiyoriy 1 ta satr yoki ustunga tegishli bo'ladi.

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} =$$
$$= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} = \quad .$$
$$= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33}$$

Bu tengliklar algebraik to'ldiruvchilarning mos satr yoki ustun bo'yicha kengaytmasi deyiladi.(3x3) matritsa uchun olingan natijalar quyida isbotsiz keltirilgan umumlashgan teoremaning hususiy holi bo'ladi.

Teorema. (nxn) o'lchovli A matritsaning determinanti ixtiyoriy satr (ustun) elementlarini shu elementlarining mos algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shganiga teng, ya'ni $1 \le i \le n$ va $1 \le j \le n$ bo'lganda

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}C_{kj}$$

algebraik to'ldiruvchining j-ustun bo'yicha kengaytmasi va

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{ik}$$

algebraik to'ldiruvchining satr bo'yicha kengaytmasi.Biz ixtiyoriy satr yoki ustunni tanlashimiz mumkin.

Misol. (Algebraik to'ldiruvchi kengaytmasi) misoldagi matritsa berilgan bo'lsin.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Matritsaning determinantini uning ixtiyoriy satri algebraik to'ldiruvchining kengaytmasi orqali hisoblang.

Yechish. A matritsaning algebraik to'ldiruvchilari quyidagicha aniqlanadi:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 11 & 12 \\ 2 & -6 & -7 \\ 3 & -9 & -10 \end{pmatrix}$$

2-satrini tanlaymiz va mos algebraik to'ldiruvchilarni hisoblaymiz:

$$\det(A) = -2 \cdot 2 - 4 \cdot (-6) + 3 \cdot (-7) = -1$$

Xuddi shu kabi 3-ustun bo'yicha ham topamiz:

$$\det(A) = 0 \cdot 12 + 3 \cdot (-7) - 2 \cdot (-10) = -1.$$

Bir xil natijalarga ega bo'lamiz.

Eslatma. Bu misolda biz uchta algebraik to'ldiruvchi hisoblashimiz kerak edi, lekin biz faqat ikkitasini hisobladik.Chunki uchinchisini 0 ga ko'paytirish kerak edi.Shuning uchun satr va ustunlardan iloji boricha noli ko'plarini tanlash maqsadga muvofiq.

Teskari matritsani hisoblash formulasi:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \cdots & A_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \cdots & A_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ –algebraik to‘ldiruvchilar matritsasining transponirlangan ko‘rinishi. Har bir elementni aniqlash uchun albatta minorlardan foydalaniladi. Fizikada tok kuchlari va kuchlanmalarni aniqlovchi Kirxgof tenglamalarida; Muhandislik sohasida deformatsiyalarni hisoblashda (strukturaviy modellar); Informatika: grafik transformatsiyalarni teskari hisoblashda.

Kriptografiyada teskari matritsa orqali kalitlar generatsiyasi. Matritsali shifrlash algoritmlarida maxfiy kalit sifatida matritsa ishlatiladi. Shifrlangan matnni qayta ochish uchun teskari matritsa kerak. Bu teskari matritsa algebraik to‘ldiruvchilar orqali topiladi.

Simmetrik shifrlashda matritsa asosli kriptosistemalar;

Ma'lumotlar xavfsizligi maxfiylikni ta'minlovchi kodlash tizimlari.

Burish, masshtablash, proyeksiya va siljitish kabi harakatlar matritsalar orqali amalga oshiriladi. Bu harakatlarni qaytarish (invert qilish) teskari matritsani talab qiladi, bu esa algebraik to‘ldiruvchilarsiz mumkin emas.

1) Kompyuter o‘yinlari, animatsiyalar, VR tizimlarida obyekt harakati.

2) Robototexnika: manipulyatorlar harakatining orqaga qaytarilishi (inverse kinematics).

Iqtisodiy modellashtirish (Leontyev modeli) $X = (E - A)^{-1} \cdot D$ formulasi ishlatiladi. Matritsaning teskari ko‘rinishini aniqlashda algebraik to‘ldiruvchilarga asoslaniladi.

- ✓ Tarmoqlararo balans
- ✓ Iqtisodiy o‘sish va ishlab chiqarish hajmlarini tahlil qilish
- ✓ Tizim barqarorligi: $\det(E - A) \neq 0$

Populyatsiya dinamikasida (Leslie modeli). Matritsali model orqali biologik populyatsiyalar o‘sishini bashorat qilishda o‘z qiymatlar hisoblanadi, bu qiymatlar determinant va minorlar orqali yechiladi.

Ekologik monitoring

Demografik prognozlar

Yashovchanlik dinamikasini modellashtirish

Mehmechanika va strukturaviy muhandislikda: tayanch kuchlari va momentlarni hisoblashda chiziqli tenglamalar tizimi hosil bo‘ladi. Bu sistemani yechishda determinantal usullar (Cramer qoidasi) ishlatiladi. Har bir noma’lum uchun minorlar orqali ifodalangan formulalar olinadi:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

Minorlar va algebraik to‘ldiruvchilar, o‘z navbatida determinantlar, murakkab tizimlarni matematik modellashtirishda markaziy rol o‘ynaydi. Ular yordamida: Matritsali tenglamalar yechimlarini analitik topish mumkin; Tizimlarning barqarorligi va mavjudligi tahlil qilinadi; Fizik, texnik, iqtisodiy va biologik modellar quriladi;

Shifrlash va kompyuter grafikasi kabi zamonaviy texnologiyalarning asosiy komponenti sifatida xizmat qiladi. Shu jihatdan, minorlar va algebraik to'ldiruvchilar chiziqli algebraning nafaqat nazariy, balki amaliyotda beqiyos ahamiyatga ega vositalaridir. Ularni o'rganish va real tizimlarga tadbiq etish zamonaviy fan va texnika rivojining muhim tarkibiy qismini tashkil qiladi.

Ushbu maqolada minorlar va algebraik to'ldiruvchilar tushunchasining chiziqli algebra doirasidagi nazariy asoslari bilan bir qatorda, ularning zamonaviy fan va texnikaning turli sohalarida tutgan o'rni atroflicha tahlil qilindi. Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatadiki, har qanday ko'p o'zgaruvchili tizimni chiziqli modellashtirishda matritsa elementlariga mos minorlar va ularning asosida tuziladigan algebraik to'ldiruvchilar muhim analitik vositalar sifatida ishlatiladi. Ayniqsa, determinanti noldan farqli bo'lgan kvadrat matritsalarning teskari matrisasini hisoblashda bu tushunchalarning qo'llanilishi fundamental rol o'ynaydi.

Amaliy jihatdan esa, minorlar va algebraik to'ldiruvchilarning samarali qo'llanilishi elektr zanjirlari modellashtirishida, iqtisodiy tarmoqlararo bog'liqliklarni aniqlashda, grafik transformatsiyalarni tuzishda, populyatsiya tahlilida hamda axborot texnologiyalariga oid algoritmik tizimlarda o'zining dolzarbligini namoyon etadi. Ular yordamida tizimdagi har bir parametrning o'zgarishi natijasida yuzaga keladigan umumiy dinamikani noaniqlik holatlarida ham chuqur tahlil qilish imkoniyati tug'iladi.

Shuningdek, algebraik to'ldiruvchilar orqali determinanti maksimal bo'lgan yoki nolga tenglashadigan shartlarni aniqlab, tizimning barqarorligini, tiklanish imkoniyatini va asosiy tarkibiy qismlarining ta'sir kuchini baholash mumkin. Bu holat ayniqsa iqtisodiyot, muhandislik va biotibbiyot kabi murakkab ko'p komponentli tizimlarda muhim ahamiyatga ega.

Shu bois, minorlar va algebraik to'ldiruvchilar nafaqat nazariy chiziqli algebra fanining asosiy tarkibiy qismlaridan biri, balki fanlararo muammolarni matematik modellashtirishda keng va ishonchli foydalaniladigan universal vosita sifatida namoyon bo'ladi. Kelgusidagi izlanishlar ushbu tushunchalarni sun'iy intellekt, kriptografiya, kvant hisoblash va sistemalar nazariyasida yanada chuqurlashtirib qo'llashga xizmat qilishi mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Sh.R.Xurramov Oliy matematika (masalalar to'plami, nazorat topshiriqlari) 1-qism: o'quv qo'llanma, "Fan va texnologiya" Toshkent-2015 - 408 bet.
2. Karimov E., Meliboyev A., Islomov B. Oliy matematika. 1-qism. Toshkent: "Fan va texnologiya", 2016. – 432 bet
3. A.R.Xashimov, Sh.Sh.Bobadjanov, G.S.Xujaniyozova "Iqtisodchilar uchun matematika" Darslik, "Iqtisod-Moliya", Toshkent-2019, 571 bet.