5 IYUN / 2025 YIL / 49 – SON

IKKI KARRALI INTEGRALNING NAZARIY ASOSLARI VA FAN-TEXNIKA SOHALARIDAGI AMALIY TATBIQLARI

Abdullayeva Dildora Anvarovna
Navoiy davlat konchilik va texnologiyalar universiteti,
Oliy matematika va axborot texnologiyalari kafedrasi katta o'qituvchi

Annotatsiya. *Ushbu maqolada ikki karrali integral tushunchasining nazariy asoslari va uning zamonaviy fan va texnika sohalaridagi amaliy qo'llanilish imkoniyatlari tahlil qilingan. Ikki karrali integral matematik analizning ko'p o'zgaruvchili funksiyalarni o'rganuvchi bo'limida markaziy o'rin tutadi va fizik, muhandislik, iqtisodiy, ekologik hamda axborot texnologiyalari tizimlarida keng qo'llaniladi. Maqolada ushbu integral vositasida murakkab shaklli ikki o'lchamli mintaqalarning yuzasini hisoblash, resurslar taqsimotini baholash, issiqlik va massa oqimlarini aniqlash kabi real amaliy masalalar yoritilgan. Xususan, egri chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzasini hisoblash masalasi orqali ikki karrali integralning iteratsion ko'rinishdagi qo'llanilishi chuqur tahlil etilgan. Tadqiqot natijalari ikki karrali integralning nafaqat nazariy tahlil uchun, balki texnologik jarayonlarda aniqlik, samaradorlik va modellashtirish imkonini ta'minlaydigan kuchli matematik vosita ekanligini tasdiqlaydi.*

Abstract. *This article explores the theoretical foundations and practical applications of the double integral concept in various fields of modern science and technology. As a fundamental tool in multivariable calculus, the double integral plays a vital role in modeling and analyzing complex systems in physics, engineering, economics, ecology, and information technology. The paper presents real-world problems that demonstrate the application of double integrals in calculating the area of irregular surfaces, evaluating resource distributions, analyzing heat and mass flows, and more. A detailed analysis of a surface area calculation over a parabolic region illustrates the step-by-step implementation of the double integral using its iterated form. The study confirms that the double integral is not only a powerful analytical method but also a highly effective mathematical tool for ensuring accuracy and efficiency in technological processes and system modeling.*

Kalit so'zlar. *Ikki karrali integral, ko'p o'zgaruvchili funksiyalar, sirt maydonini hisoblash, matematik modellashtirish, muhandislik tahlili, fizika tatbiqlari, iqtisodiy modellashtirish, ekologik modellashtirish, issiqlik tarqalishi, resurslarni optimallashtirish, iteratsion integral, hisoblash matematikasi, real muammolarni yechish, sirt geometriyasi, tizimlarni simulyatsiya qilish.*

Keywords: *Double integral, multivariable functions, surface area calculation, mathematical modeling, engineering analysis, physics applications, economic modeling, ecological modeling, heat distribution, resource optimization, iterated integral, computational mathematics, real-world problem solving, surface geometry, system simulation.*

Fizika, muhandislik, iqtisodiyot, ekologiya, informatika kabi sohalarda murakkab tizimlarni modellashtirish zaruratining kuchayishi matematik analizning ko'p o'zgaruvchili funksiyalarni o'rganuvchi bo'limlariga bo'lgan ehtiyojni sezilarli darajada oshirdi. Bu ehtiyojni qondiruvchi eng muhim vositalardan biri bu ikki karrali integral hisoblanadi.

Ikki karrali integral tushunchasi matematik analizning asosiy bo‘limlaridan biri bo‘lib, u ikki o‘zgaruvchili $f(x,y)$ funksiyaning berilgan tekislikdagi soha ustidagi umumiy qiymatini ya’ni, fizik nuqtai nazardan ko‘plab hollarda massa, yuzaning maydoni, energiya, ish, kuch, ehtimollik zichligi yoki resurslar taqsimoti kabi kattaliklarni aniqlash imkonini beradi. Ushbu vosita turli o‘zgaruvchilar o‘rtasidagi bog‘liqliklarni kompleks tarzda tahlil qilishga yordam beradi va bu esa real hayotdagi ko‘plab muammolarning zamonaviy matematik modellarini qurishga asos yaratadi.

Texnologiyalar bilan uyg‘unlashgan ikki karrali integral bugungi kunda quyidagi yo‘nalishlarda o‘zining mustahkam o‘rnini egallagan: muhandislikda konstruksiyalarni loyihalash va ulardagi kuchlanishlarni tahlil qilish, energetika va termodinamika tizimlarida issiqlik tarqalishini modellashtirish, iqtisodiy tahlilda resurslar va talablar taqsimotini hisoblash, ekologiyada ifloslanish zichligining hududiy o‘zgarishlarini aniqlash, biotibbiyotda tana yuzasidagi bioaktiv moddalarning taqsimotini o‘rganish, va axborot texnologiyalarida tasvirlarni qayta ishlash, kompyuter grafikasi, mashinaviy o‘rganish kabi jarayonlarda obyekt yuzalarini matematik ifodalash.

Ikki karrali integralning amaliy imkoniyatlari nafaqat nazariy tahlillar bilan, balki real muammolar yechimidagi qo‘llanilishi bilan ahamiyatlidir. Ayniqsa, sanoat va texnikada yuzalar ustida bajariladigan ish, energiya sarfi, issiqlik va massa oqimlari, biologik sistemalarda populyatsiya zichligi yoki iqtisodiy hududlarda aholiga xizmat ko‘rsatish darajalarini baholashda ikki karrali integral aniq va asosli yechimlarni taqdim etadi.

Mazkur maqolada ikki karrali integralning asosiy nazariy tushunchalari bilan birga, ularning zamonaviy fan va texnika sohalaridagi konkret amaliy qo‘llanilishlari jumladan, fizik jarayonlar, iqtisodiy modellar, muhandislik tizimlari, kompyuter grafikasi va ekologik hisob-kitoblardagi tatbiqlari tahlil qilinadi. Real hayotiy masalalar asosida keltirilgan misollar orqali ikki karrali integralning ahamiyati, uning tahliliy quvvati va natijaviy samaradorligi ochib beriladi.

Matematik analizda bir o‘zgaruvchili funksiyalar integralidan farqli o‘laroq, ikki yoki undan ortiq o‘zgaruvchili funksiyalarni tahlil qilishda ko‘p o‘zgaruvchili integral tushunchasi muhim o‘rin egallaydi. Xususan, $f(x,y)$ kabi ikki o‘zgaruvchili funksiyalarni berilgan soha ustida integrallash zarurati yuzaga keladi. Bunday hollarda ikki karrali integral tushunchasiga murojaat qilinadi.

Bu integralning intuitiv mohiyati berilgan funksiyaning qiymatlarini ikki o‘zgaruvchidan iborat soha ustida jamlash orqali umumiy qiymatni topishdir. Masalan, fizikada bu funksiya zichlikni ifodalaydigan bo‘lsa, ikki karrali integral jismning massasi bo‘ladi.

Faraz qilaylik, $f(x,y)$ funksiyasi $D \subset R^2$sohada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. Soha D ni kichik to‘g‘ri to‘rtburchaklarga bo‘lamiz:

$D = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} R_{ij}$ har bir $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y]$

Har bir R_{ij} $f(x,y)$ funksiyaning qiymati sifatida ixtiyoriy nuqtadagi qiymat $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ olinadi va bu qiymatlar yordamida quyidagi Rieman yig‘indisi tuziladi:

$$S = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j$$

Agar to‘g‘ri to‘rtburchaklarning o‘lchami noldan cheksiz kichik bo‘lganda bu yig‘indi limitga ega bo‘lsa, u holda bu limit **ikki karrali integral** deb ataladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\iint_D f(x,y)\,dA$$

bu yerda $dA = dx$ soha yuzasi elementidir.

Ikki karrali integralning iteratsion (qator) ko‘rinishi. Agar $\boldsymbol{f(x,y)}$ funksiyasi yopiq, chegaralangan to‘g‘ri to‘rtburchak sohada $\boldsymbol{D = [a,b] \times [c,d]}$ zluksiz bo‘lsa, ikki karrali integralni iteratsion ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\boldsymbol{\iint_D f(x,y)\,dydx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy}$$

Murakkab shaklli ikki o‘lchamli obyektlarning yuzasini aniq hisoblash matematik analizning asosiy muammolaridan biridir. Muhandislik, arxitektura, sanoat dizayni, aerodinamika va kompyuter grafikasi kabi sohalarda real jismning biror qismining sirt yoki qoplama yuzasini aniqlash zarurati tez-tez uchraydi. Ayniqsa, obyektning geometrik chegaralari to‘g‘ri chiziq bilan emas, balki egri chiziqlar bilan chegaralangan bo‘lsa, bu hisoblashlarni analitik usulda amalga oshirish faqatgina ikki karrali integral vositasi orqali mumkin bo‘ladi.

Berilgan mintaqa $\boldsymbol{D}$ quyidagi tarzda aniqlangan:

$$\boldsymbol{D = \{(x,y)\colon 0 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 1 - x^2}$$

Bu soha x o‘qida 0 dan 1 gacha va har bir x qiymatiga mos ravishda yyy koordinatasi 0 dan $1 - x^2$gacha o‘zgaradigan nuqtalar to‘plamidir. Ushbu soha parabola $y = 1 - x^2$ ostidagi egri soha bo‘lib, yuqoridan parabola, pastdan $y = 0$0, chapdan $x = 0,$ o‘ngdan $x = 1$ chiziqlari bilan chegaralangan.

Yuzani hisoblash uchun

$$S = \iint_D dxdy$$

Sohaning chegarasiga mos holda integralni iteratsion shaklda yozamiz:

$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=o}^{1-x^2} dydx$$

Ichki integralni hisoblaymiz:

$$\int_0^{1-x^2} dy = y|_0^{1-x^2} = 1 - x^2$$

Endi tashqi integralni hisoblaymiz:

Shunday qilib, berilgan D soha ostidagi maydon (yoki sirt yuzasi):

$S = \frac{2}{3}$ ga teng bo‘ladi.

$$S = \int_0^1 (1 - x^2)\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Shunday qilib, berilgan D soha ostidagi maydon yoki sirt yuzasi:

$S = \frac{2}{3}$ ga teng bo‘ladi.

Mazkur matematik model va hisoblash natijalari real hayotda quyidagi sohalarda qo‘llaniladi. **Mexanika:** mashina qismlarining (kapot, qanot, korpus) egri yuzalarining sirt maydonini aniqlashda; **Arxitektura:** egri tomli binolarni loyihalash va ularning ustki qoplamasi (qaytmas, metall, shifer) uchun zarur material miqdorini hisoblashda; **Aviatsiya va avtomobilsozlikda** aerodinamik shakllarning bo‘yaladigan yoki to‘qnashuv yuzalarini aniqlashda; **Sanoat dizayni:** Modellashtirish orqali yuzalarni silliqlash, yoritish, simulyatsiya qilishda; Bunday yuzani ikki karrali integral orqali aniq ifodalash texnologik jarayonlarda aniqlik va samaradorlikni oshirishga xizmat qiladi.

Bu masala ikki karrali integralning eng asosiy geometrik qo‘llanilishlaridan biri **maydonni aniqlash** uchun qanday ishlatilishini ko‘rsatadi. Egri chegaralangan mintaqalarda integralning iteratsion shakli (ya’ni Fubini teoremasi asosidagi ikki bosqichli hisoblash) sohani qamrab olishda aniqlik beradi. Bunday yondashuvlar faqat nazariy tahlil emas, balki amaliy texnologik tizimlarda ham dolzarb ahamiyatga ega.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Sh.R.Xurramov Oliy matematika (masalalar to’plami, nazorat topshiriqlari) 1-qism: o'quv qo'llanma, “Fan va texnologiya” Toshkent-2015 - 408 bet.
2. Karimov E., Meliboyev A., Islomov B. Oliy matematika. 1-qism. Toshkent: “Fan va texnologiya”, 2016. - 432 bet