ZICHLIK FUNKSIYASI ORQALI YASSI JISMLARNING MASSASI VA ISSIQLIK ENERGIYASINI IKKI KARRALI INTEGRAL YORDAMIDA HISOBLASHNING NAZARIY VA AMALIY JIHATLARI

Ismoilova Zamira Tuxtayevna
Navoiy davlat konchilik va texnologiyalar universiteti,
Oliy matematika va axborot texnologiyalari kafedrasi katta o'qituvchi

Annotatsiya. *Mazkur maqolada ikki karrali integralning fizik va muhandislik sohalaridagi amaliy qo‘llanilishlari, xususan, zichlik funksiyasi yordamida massani va harorat zichligi asosida issiqlik miqdorini aniqlash masalalari tahlil etilgan. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar orqali ifodalangan fizik kattaliklarni hisoblashda ikki karrali integralning nazariy asoslari, iteratsion shakldagi yechimlari va qutbiy koordinatalarga o‘tish usuli batafsil ko‘rib chiqilgan. Maqolada ayniqsa real hayotda uchraydigan geometrik jihatdan murakkab jismlar ustida bajariladigan hisob-kitoblarning matematik modellashtirish orqali yechimini topish misollar bilan yoritilgan. Ushbu yondashuv sanoat, elektronika, energetika, harbiy texnika va boshqa ko‘plab sohalarda materiallarning massaviy va energetik tavsiflarini aniqlashda katta amaliy ahamiyatga ega ekani asoslab berilgan.*

Abstract. *This article explores the practical applications of double integrals in physics and engineering, particularly focusing on problems involving the computation of mass using a density function and the calculation of heat quantity based on temperature distribution. The theoretical foundations of double integrals, their iterated solutions, and the transition to polar coordinates are thoroughly examined in the context of multivariable function analysis. The study highlights the role of mathematical modeling in solving real-life problems involving geometrically complex bodies. Special attention is given to examples that demonstrate how such integrals can be used to accurately evaluate physical quantities. This approach proves to be of great practical significance in assessing the mass and energy characteristics of materials across a wide range of fields, including industry, electronics, energy systems, and defense technologies.*

Kalit so‘zlar: *Ikki karrali integral, zichlik funksiyasi, massa hisoblash, issiqlik tarqalishi, qutbiy koordinatalar, matematik modellashtirish, fizik modellar, muhandislik hisoblari, ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar, iteratsion integral, energiya taqsimoti, sanoat tizimlari, termal tahlil, integral hisoblash, real muammolarni modellashtirish.*

Keywords: *Double integral, density function, mass calculation, heat distribution, polar coordinates, mathematical modeling, physical models, engineering computations, multivariable functions, iterated integral, energy distribution, industrial systems, thermal analysis, integral computation, real-world problem modeling.*

Fizikada jismning umumiy massasini hisoblash masalasi ko‘plab muhandislik va ilmiy tarmoqlarda muhim o‘rin tutadi. Agar jismlar bir jinsli bo‘lmasa yoki ularning zichligi koordinatalarga bog‘liq bo‘lsa, bunday holatlarda massani aniqlashda oddiy formulalar yetarli emas. Shu kabi murakkab holatlarda matematik analizning kuchli vositalaridan biri ikki karrali integral yordamga keladi. Massani hisoblash uchun ikki karrali integral quyidagicha qo'llaniladi:

Agar berilgan sohada joylashgan yassi jismning zichligi har bir nuqtada $\rho(x,y)$funksiyasi bilan ifodalansa, unda ushbu jismning umumiy massasi $|M|$ikki karrali integral orqali quyidagicha topiladi:

$$M = \iint_D \rho(x,y)ds = \iint_D \rho(x,y)dxdy$$

M –bu umumiy massa, ya'ni biz hisoblamoqchi bo'lgan jism yoki obyektning umumiy massasi;

$\rho(x,y)$ –bu zichlik funksiyasi bo'lib, har bir nuqtadagi (x,y) koordinatasida jismning massasi qanday taqsimlanganini ko'rsatadi;

D – bu soha yoki jism egallagan ikki o'lchamli fazoviy qism;

ds – bu yuzaning elementar maydoni,

Shunday qilib, formulada har bir nuqtada zichlik $\rho(x,y)$ ni o'sha nuqtaga mos yuzaning juda kichik qismini ifodalovchi ds ga ko'paytirib, butun mintaqa bo'ylab jamlanmoqda. Bu yig'indining limit holati esa ikki karrali integral orqali ifodalanadi.

Masala. Issiqlik ta'sirida zichligi o'zgaruvchi materialning massasini hisoblash:

Elektron qurilmalarda ishlatiladigan issiqlik tarqatuvchi metall plastinalar masalan, alyuminiy asosli panellar haroratning joyga qarab o'zgarishi ta'sirida zichligi (massa birlik hajmiga nisbati) bir tekis bo'lmagan taqsimotga ega bo'ladi. Bunday hollarda an'anaviy doimiy zichlik asosidagi formulalar massani aniq baholay olmaydi. Shuning uchun zichlik koordinatalarga bog'liq bo'lgan holda o'zgaruvchi holatlarda ikki karrali integral orqali aniqlash zarur bo'ladi. Quyidagi paraboloid ostida yotuvchi yassi jismning umumiy massasini hisoblang. Zichlik har bir nuqtada joylashuvga (x,y) bog'liq bo'lib, fizik qonunga asosan quyidagicha beriladi:

$$\rho = (x,y) = 1 + x^2 + y^2$$

Soha D: birlik aylana ichida joylashgan mintaqa, ya'ni

$$D = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Massani aniqlovchi formula yordamida massani hisoblaymiz:

$$M = \iint_D \rho(x,y)ds = \iint_D \rho(x,y)dxdy = \iint_D (1 + x^2 + y^2)dxdy$$

Massani hisoblash uchun eng qulay yondashuv qutb koordinatalarga o'tish bo'ladi, chunki birlik aylana sohasida $x^2 + y^2 = r^2$ ko'rinishga ega.

Qutb koordinatalarga o'tamiz:

$$x = \rho cos\theta, \qquad y = rsin\theta, \qquad ds = dxdy = rdrd\theta;$$

Shunda:

$$\rho(x,y) = 1 + x^2 + y^2 = 1 + r^2;$$

Demak:

$$M = \iint_D (1 + x^2 + y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + r^2)\, rdrd\theta$$

Ichki integral:

$$\int_0^1 (1 + r^2)rdr \int_0^1 (r + r^3)dr = \left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4};$$

Tashqi integral:

$$M = \int_0^{2\pi} \frac{3}{4} d\theta = \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2} = 4{,}71\ k = 4{,}71\ kg$$

Zichlik o‘zgaruvchan bo‘lishi bu modelda har bir nuqtadagi zichlik atrofdagi joylashuvga (x va y ga) bog‘liq bo‘lib, markazdan uzoqlashgan sari zichlik ortadi. Bu fizik jihatdan, masalan, materialning harorat yoki bosim ta’sirida notekis zichlashgan holatlarini ifodalashi mumkin;

Yassi jism mintaqasi bu yerda birlik aylana ichidagi har qanday nuqta hisobga olinmoqda. Bu esa simmetrik va doira shaklidagi real obyektlar (masalan, robot platformasi, sensor maydoni, metall panel) ustida ishlashda qulaylik beradi;

Integrallash orqali massani olish har bir kichik yassi bo‘lak $dxdy$ uchun zichlik qiymatlari yig‘ilib, butun jism bo‘yicha to‘planmoqda. Bu Riemann yig‘indisining limitidir va bu holda ikki karrali integral bilan ifodalanadi.

Bu son doira ostida joylashgan, zichligi $\rho(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ bo‘lgan jismning umumiy massasidir. Oddiy doimiy zichlik masalan, $\rho = 1$ holatida massaning qiymati faqat πga teng bo‘lar edi. Ammo zichlik o‘zgaruvchi bo‘lgani uchun massa ortgan va bu ortish simmetrik radial o‘sish hisobiga bo‘lgan.

Amaliy jihatlari bu natija materiallar tejamkorligi, konstruktsiyalarning barqarorligini tahlil qilish, yoki termodinamik energiya taqsimoti kabi ko‘plab sohalarda zarur.

Issiqlik panellari haroratga qarab zichlashsa ularning og‘irligi qanday taqsimlanadi?

Harbiy sohalarda portlovchi materiallar zichligining markazdan uzoqlashgan sari oshishi og‘irlik va kuch ta’sirini qanday beradi?

Boshqariladigan sensorli panellarda zichlikka qarab massani baholash orqali energiyani optimallashtirish mumkinmi?

Bu natija ikki karrali integralning real fizik tizimlarda qanday aniq baholar berishi mumkinligini ko‘rsatadi. Zichlikni koordinatalar bilan o‘zgaruvchi qilib olish orqali model murakkablashdi, lekin ancha realistik bo‘ldi. Bu yondashuv har qanday holatda noaniq yoki faraziy baholashlardan ko‘ra aniq, ishonchli va nazariy asoslangan massaviy tahlilga asos bo‘la oladi.

Issiqlik ta’sirida zichligi o‘zgaruvchi materialning massasini hisoblash. Zamonaviy elektron qurilmalarda ishlatiladigan issiqlik tarqatuvchi metall plastinalar masalan, alyuminiy asosli panellar haroratning joyga qarab o‘zgarishi ta’sirida zichligi massa birlik hajmiga nisbati bir tekis bo‘lmagan taqsimotga ega bo‘ladi. Bunday hollarda an’anaviy doimiy zichlik asosidagi formulalar massani aniq baholay olmaydi. Shuning uchun zichlik koordinatalarga bog‘liq bo‘lgan holda o‘zgaruvchi holatlarda ikki karrali integral orqali aniqlash zarur bo‘ladi.

Masala. Issiqlik tarqalishi orqali umumiy energiyani hisoblash: Issiqlik tarqalishi muammosi zamonaviy texnologiyalarda, ayniqsa materialshunoslik, termodinamika, energetika tizimlari va sanoat konstruksiyalarida markaziy o‘rin tutadi. Haroratning muayyan geometriyadagi sirt yoki jism bo‘ylab qanday taqsimlangani va bu taqsimot natijasida umumiy issiqlik miqdorining qanday aniqlanishi, samarali ishlov berish, material tanlash va energiya tejamkorligini oshirishda hal qiluvchi omildir. Ko‘rib chiqilayotgan masalada biz birlik aylana shaklidagi tekis plastinkani tasavvur qilamiz. Plastinkaning har bir nuqtasida harorat zichligi

$$\rho(x,y) = 100 - x^2 + y^2$$

ko‘rinishida kamayuvchi funktsiya bilan berilgan. Bu ifoda shuni anglatadiki, harorat markazda ya’ni $x = 0, y = 0$ maksimal qiymatda 100 birlikni tashkil qiladi va periferiyaga yaqinlashgan sayin parabolik tarzda kamayadi, bu esa real termik tizimlar uchun juda tabiiy modeldir.

Issiqlik energiyasi zichlik funksiyasining soha bo‘ylab integralidan iborat

$$Q = \iint\limits_D \rho(x,y)ds$$

$$D = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Integrallash sohasi birlik doira, ya’ni radiusi 1 bo‘lgan aylana. Doiraning simmetriyasi va zichlik funksiyasining shakli tufayli, hisoblashni soddalashtirish uchun qutbiy koordinatalarga o‘tamiz:

Issiqlik tarqalishi orqali umumiy energiyani hisoblash uchun eng qulay usul qutb koordinatalarga o‘tish bo‘ladi, chunki birlik aylana sohasida $x^2 + y^2 = r^2$ ko‘rinishga ega.

Qutb koordinatalarga o‘tamiz:

$$x = \rho cos\theta, \qquad y = rsin\theta, \qquad ds = dxdy = rdrd\theta;$$

Shunda:

$$\rho(x,y) = 100 - x^2 - y^2 = 1 - r^2;$$

Demak: $Q =$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (100 - r^2)rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (100r - r^3)dr = \left(50r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{199}{4}$$

$$Q = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \frac{199}{4} = 2\pi \cdot \frac{199\pi}{4}$$

Bu natija shuni ko‘rsatadiki, plastinkadagi umumiy issiqlik miqdori birlikka$\frac{199\pi}{2}$ teng.

Ushbu natija ko‘plab texnik sohalarda real masalalarni hal qilishda ishlatiladi**:**

Metall qoplamalarni issiqlik sinovidan o‘tkazishda: Metall plastinkalar turli harorat gradientlari ostida deformatsiyalanishi, kengayishi yoki yorilishi mumkin. Haroratning sirt bo‘ylab qanday taqsimlangani va u bo‘yicha to‘plangan issiqlik miqdorini bilish konstruktiv barqarorlikni oldindan baholashda muhim;

Quyosh panellari samaradorligini baholashda: Quyosh nurlari konsentratsiyasiga bog‘liq tarzda harorat zichligi parabolik yoki radial ko‘rinishda bo‘lishi mumkin. Qutbiy integral yordamida panellarning issiqlik yig‘ish quvvatini aniqlash quyosh energiyasi tizimlarini optimallashtirishda qo‘llaniladi;

Turbinalarda haroratning aylana shaklidagi komponentlarga ta’siri: Jet dvigatellar yoki bug‘ turbinalarida harorat sirt bo‘ylab notekis taqsimlanadi. Integrallash orqali harorat ta’sirida yuzaga keladigan umumiy energiyani hisoblab, muhandislar material tanlovi va sovutish tizimini loyihalashtiradi;

Nanoelektronika va chip dizaynida: Mikrochiplar ustida harorat notekis tarqaladi, bu esa ularning ishlash samaradorligiga ta’sir qiladi. Ayniqsa, kichik geometrik sirtlardagi harorat zichligining matematik ifodasi orqali issiqlik boshqaruvi modellashtiriladi;

Yorug‘lik va issiqlikni aks ettiruvchi sirtlar dizayni: Avtomobil kapotlari yoki samolyot qanotlari kabi elementlarning energiya tarqatish qobiliyati, qizib ketmasligi va material sifati ushbu integral asosida baholanadi.

Ushbu masala ikki karrali integral yordamida fizik muhitdagi energiya taqsimotini tahlil qilish, ayniqsa sirt bo‘ylab parabolik o‘zgaruvchi zichlik funksiyasi orqali energiyani ifodalashning kuchli matematik modeli sifatida xizmat qiladi. Bunday yondashuv, zamonaviy sanoat va muhandislik tizimlarida energiyani hisoblashda nazariy asos va amaliy vosita sifatida keng qo‘llaniladi. Masshtabli va aniqlikni talab qiladigan tizimlar uchun, bu integral optimal dizayn, xavfsizlik va barqaror ishlashni ta’minlovchi muhim vositadir.

Ushbu maqolada ikki karrali integral yordamida yassi jismlarning massasi va harorat zichligi asosida issiqlik miqdorini hisoblash masalasi chuqur tahlil qilindi. Zichlik funksiyasi koordinatalarga bog‘liq bo‘lgan holatlarda, klassik yondashuvlar yetarli aniqlik bermasligi, ayniqsa murakkab geometrik shakllarda yuzaga keladigan hisob-kitoblarda ikki karrali integralning qo‘llanilishi dolzarb ahamiyat kasb etishi ko‘rsatib o‘tildi.

Qutb koordinatalar orqali amalga oshirilgan hisoblashlar birlik doira kabi simmetrik sohalarda integralni sezilarli darajada soddalashtiradi va bu orqali fizik kattaliklarni massa, energiya, issiqlik aniqlik bilan baholash imkoniyati yaratiladi. Zichlikning fazodagi nuqtalarga bog‘liqligi haqiqiy muhitlardagi harorat, bosim yoki boshqa omillar ta’sirida yuzaga keluvchi taqsimotlarning aniq ifodasini beradi.

Yuqoridagi amaliy misollar orqali ikki karrali integralning nafaqat nazariy asoslari, balki real muhandislik, termodinamika, energetika va materialshunoslik sohalaridagi qo‘llanilishi ochib berildi. Bu esa uni zamonaviy texnologik tizimlarda samarali hisoblash vositasi sifatida keng qo‘llashga asos yaratadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

3. Sh.R.Xurramov Oliy matematika (masalalar to’plami, nazorat topshiriqlari) 1-qism: o'quv qo'llanma, “Fan va texnologiya” Toshkent-2015 - 408 bet.

4. Karimov E., Meliboyev A., Islomov B. Oliy matematika. 1-qism. Toshkent: “Fan va texnologiya”, 2016. - 432 bet