SFERIK KOORDINATALARDA ZICHLIGI O'ZGARUVCHI YARIM SHAR JISMINING OG'IRLIK MARKAZINI HISOBLASH

Ismoilova Zamira Tuxtayevna
Navoiy davlat konchilik va texnologiyalar universiteti,
Oliy matematika va axborot texnologiyalari kafedrasi katta o'qituvchi

Annotatsiya. *Ushbu maqolada zichligi fazodagi nuqtaning markazdan uzoqligiga bog'liq holda o'zgaruvchi, yuqoriga qaragan yarim shar shaklidagi moddiy jismning og'irlik markazini aniqlash masalasi ko'rib chiqilgan. Jismlarning aksariyat hollarda zichligi bir jinsli bo'lmasligi sababli, bunday tizimlarda massani aniqlash uchun uch o'lchamli integral usul zarur bo'ladi. Zichlik funksiyasi sferik simmetriyaga ega bo'lgani uchun, masala sferik koordinatalarda yechilgan. Avval jismning umumiy massasi hisoblanadi, so'ng og'irlik markazi koordinatalari aniqlanadi. Hisoblashlar natijasida og'irlik markazi koordinatalari ekanligi ko'rsatildi. Bu qiymat bir jinsli yarim shar uchun mavjud bo'lgan* $\bar{z}=\frac{3R}{8}$ *dan yuqoriroq bo'lib, zichlikning markazdan uzoqlashgan sari ortishi og'irlik markazining yuqoriga siljishiga olib kelishini tasdiqlaydi. Tadqiqot natijalari og'irlik markazini aniqlashda zichlik taqsimoti muhim rol o'ynashini va uch o'lchamli integral usulining amaliy fizik modellashtirishdagi ahamiyatini namoyon etadi.*

Annotation. *This article investigates the problem of determining the center of mass of a hemispherical solid object whose density varies depending on the distance from the origin. Since most real-world objects do not have uniform density, calculating their mass requires the use of triple integrals. Due to the spherical symmetry of the density function, the problem is solved using spherical coordinates. First, the total mass of the object is computed, and then the coordinates of the center of mass are determined. The results show that the center of mass lies higher than that of a uniformly dense hemisphere, where* $\bar{z}=\frac{3R}{8}$*, confirming that increasing density with distance from the center shifts the center of mass upward. These findings demonstrate the critical role of density distribution in determining the center of mass and highlight the practical significance of triple integral methods in physical modeling.*

Kalit so'zlar. *Zichlik taqsimoti, og'irlik markazi, uch o'lchamli integral, sferik koordinatalar, notekis zichlik, fizik modellashtirish, yarim shar jism, massa hisoblash, markazdan uzoqlik, sferik simmetriya.*

Keywords. *Density distribution, center of mass, triple integral, spherical coordinates, non-uniform density, physical modeling, hemispherical body, mass calculation, radial distance, spherical symmetry.*

Moddiy jismlarning fizik xossalarini aniqlashda ularning massasi va bu massa fazodagi qanday taqsimlangani eng muhim mezonlardan biridir. Oddiy holatlarda jism butun hajmi bo'ylab bir xil tuzilishga ega deb faraz qilinadi, bu esa massani aniqlashda klassik yondashuvdan foydalanishga imkon beradi. Biroq hayotdagi jismlar ko'pincha ichki tarkibi va zichligi jihatidan bir xil bo'lmaydi. Ularning har bir nuqtasida modda miqdori turlicha bo'lishi mumkin.

Masalan, Yer qobig‘i chuqurlik sari o‘z zichligini o‘zgartiradi, metall jismlar haroratga bog‘liq holda kengayadi va zichligi o‘zgaradi, yoki zamonaviy sanoatda keng qo‘llanilayotgan kompozit materiallar turli moddalarning birikmasidan iborat bo‘lganligi sababli, zichligi hududdan hududga farqlanadi. Ana shunday murakkab tuzilmalar uchun oddiy fizik formulalar yetarli emas, balki zichlikning fazodagi o‘zgarishini hisobga oluvchi matematik yondashuv zarur bo‘ladi.

Bu holatda massani yoki unga bog‘liq fizik kattaliklarni aniqlash uchun uch o‘lchamli fazoda matematik integrallash usulidan foydalaniladi. Bu usul nafaqat massani aniq hisoblashga, balki jismning og‘irlik markazini aniqlashga ham imkon beradi. Og‘irlik markazi - bu jism butun og‘irligi yoki massasi go‘yoki bitta markaziy nuqtada jamlangandek harakat qiladigan muvozanat nuqtasidir. Bu tushuncha jismning harakati, aylanishi va kuchlarga qanday javob berishini o‘rganishda hal qiluvchi rol o‘ynaydi.

Muhandislik, aerokosmik tizimlar, mexanik modellashtirish, qurilish va materialshunoslik sohalarida og‘irlik markazini aniq aniqlash talab etiladi. Ayniqsa, zichligi notekis taqsimlangan jismlar uchun bu markazni topish oddiy geometrik yondashuv bilan emas, balki har bir nuqtadagi zichlikni inobatga oluvchi integrallash orqali amalga oshiriladi.

Shunday qilib, uch o‘lchamli integral matematikasi murakkab jismlarning ichki tuzilmasini, zichlik taqsimotini va jismning muvozanat nuqtasini aniqlashda eng asosiy nazariy vositalardan biri hisoblanadi. Bu maqolada aynan shunday murakkab holat zichligi markazdan uzoqlashgan sari ortib boruvchi yarim shar shaklidagi jismning og‘irlik markazini aniqlash masalasi o‘rganiladi. Ushbu yondashuv orqali murakkab fizik holatlarni qanday aniqlik bilan modellashtirish mumkinligi ko‘rsatib beriladi.

Moddiy jismning massasi fizik kattalik sifatida uning egallagan hajmi va shu hajmda moddaning zichligiga bog‘liq holda aniqlanadi. Keng tarqalgan fizik modelga ko‘ra, jismning massasi deganda, uning fazodagi butun hajm bo‘ylab modda miqdorining yig‘indisi tushuniladi. Oddiy holatlarda, ya’ni jism butun hajmi bo‘ylab bir jinsli ya’ni bir xil zichlikka ega bo‘lsa, massani hisoblash klassik formulaga asoslanadi:

$$M = \rho \cdot V$$

bu yerda:

$M -$ jismning massasi,

$\rho -$ doimiy zichlik masalan, $\frac{kg}{m^3}$,

$V -$ jismning umumiy hajmi;

Biroq, hayotdagi jismlarning aksariyat qismi notekis zichlikka ega bo‘ladi. Ya’ni, jismning har bir nuqtasida zichlik har xil bo‘lishi mumkin. Masalan, yer osti qatlamlari, qattiq jismlarning temperaturaga bog‘liq kengayishi, yoki kompozit materiallar bularning har biri zichlikni makon bo‘ylab o‘zgaruvchan qilib qo‘yadi. Shunday hollarda oddiy $\rho \cdot V$ formulasi o ‘z kuchini yo‘qotadi va jism massasini to‘g‘ri aniqlash uchun uch o‘lchovli integral ya’ni hajm integralidan foydalanish zarur bo‘ladi.

Matematik nuqtai nazardan, bu usul quyidagicha ifodalanadi: jism fazodagi biror soha Vni egallagan bo‘lsin, va har bir nuqtadagi zichlik $\rho(x, y, z)$ funksiyasi orqali berilgan bo‘lsin. U holda jismning umumiy massasi M quyidagi integral orqali aniqlanadi:

$$M = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)dV$$

Bu yerda:

(x, y, z) jismdagi nuqtaning koordinatalari; $\rho(x, y, z) -$ har bir nuqtadagi zichlik funksiyasi; $dV -$ fazodagi elementar hajm.

Ushbu formula fizikada moddaning hajmiy taqsimotini hisobga olgan holda, jism massasini aniqlash imkonini beradi. Uch o'lchovli integral tushunchasi yordamida zichlikning o'zgaruvchanligini aniq hisobga olish mumkin bo'lib, bu metod og'irlik markazi, inersiya momenti, ichki energiya, bosim taqsimoti kabi ko'plab boshqa fizik kattaliklarni hisoblashning ham nazariy asosini tashkil etadi.

Shunday qilib, uch o'lchovli integral jismning strukturaviy va fizik xususiyatlarini aniqlashda eng muhim matematik vositalardan biri bo'lib, u murakkab modellarni tahlil qilishda beqiyos ahamiyat kasb etadi. Quyidagi bo'limlarda bu integralning amaliy qo'llanilishi, xususan, massani hisoblashdagi roli batafsil tahlil qilinadi.

Jismning og'irlik markazi yoki bu fazodagi shunday nuqtaki, butun jismning og'irligi yoki massasi go'yoki shu nuqtada jamlangandek ta'sir qiladi. Og'irlik markazi jismning muvozanatini tahlil qilishda, uning harakatini, aylanishini va kuchlar taqsimotini o'rganishda muhim ahamiyatga ega.

Og'irlik markazi jismning har bir nuqtasidagi massaning fazodagi joylashuviga bog'liq bo'lgani uchun, bu nuqtani aniqlashda massani aniqlovchi formuladan, ya'ni uch o'lchovli integral asosidagi yondashuvdan foydalaniladi.

Og'irlik markazi yoki massa markazi bu jismning massasi yoki og'irligi go'yoki yagona nuqtada jamlangandek harakat qiladigan markaziy nuqtadir. Agar jism muvozanatga keltirilsa, u aynan shu nuqtadan osilgan holatda barqaror turadi. Bu tushuncha statika, dinamika, konstruksiya muhandisligi, aerokosmik tizimlar va mexanik modellashtirishda muhim o'rin tutadi.

Fazoda har bir nuqtaning zichligi farqli bo'lishi mumkin. Shu sababli, og'irlik markazining koordinatalari har bir nuqtaning massasi va joylashuviga bog'liq bo'ladi.

Moddiy jismlarning muvozanat holati va harakatini o'rganishda og'irlik markazi muhim tushuncha hisoblanadi. Bu nuqta jismlarning dinamikasida, ayniqsa aylanish va kuchlar taqsimotida markaziy rol o'ynaydi. Og'irlik markazi jismdagi barcha massalar go'yoki shu nuqtada to'plangandek ta'sir qiladigan geometrik joydir.

Jismlarning tuzilmasi va zichlik taqsimoti murakkab bo'lishi mumkin. Shu sababli og'irlik markazini aniqlash uchun bizga faqat geometrik shakl emas, balki jismning zichlik funksiyasi ham kerak bo'ladi. Bu holatda og'irlik markazi matematik integrallash vositasida aniqlanadi, ya'ni jism ichidagi barcha elementar massalarning fazodagi joylashuvi hisobga olinadi.

Endi jismning og'irlik markazi koordinatalari $\bar{x}, \ \bar{y}, \bar{z}$quyidagi integral formulalar orqali aniqlanadi:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint\limits_V x \cdot \rho(x, y, z)dV$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\iiint\limits_V y \cdot \rho(x, y, z)dV$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\iiint\limits_V z \cdot \rho(x, y, z)dV$$

Bu formulalarda:

$\rho(x, y, z) -$ har bir nuqtadagi massa dm ni $x -$ o ‘qi bo‘yicha tortilayotgan miqdori,

$\bar{x}$ $-$umumiy og‘irlikni x $-$o‘qi bo‘yicha balanslovchi qiymat;

Shu kabi $\bar{y}$ va $\bar{z}$ ham fazodagi yondosh o‘qlar bo‘yicha og‘irlikning muvozanat nuqtasini beradi.

Bu formulalar fizikadagi massali o‘rtacha qiymat formulalariga o‘xshaydi, chunki og‘irlik markazi bu jismning massaga bog‘liq markaziy joyi

Zichligi o‘zgaruvchi yarim shar jismning og‘irlik markazini topish:

Masala. Fazoda radiusi R bo‘lgan yuqoriga qaragan yarim shar shaklidagi jism ko‘rib chiqilmoqda. Bu jismda zichlik fazodagi nuqtaning markazdan ya’ni koordinata boshidan uzoqligiga kvadratik ravishda oshib boradi, ya’ni zichlik funksiyasi quyidagicha berilgan:

$$\rho(x, y, z) = k \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Bu yerda $k -$ ijobiy doimiy masalan, zichlik birligi uchun ${}^{kg}/_{m^4}$ .Jism yuqoriga qaragan, ya’ni $z \geq 0$ bo‘lgan yarim shar shaklida.

Jismning og‘irlik markazi koordinatalarini $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ toping.

Yechish. Bu masalada zichlik fazodagi koordinatalarning kvadrat yig‘indisiga bog‘liq bu esa sferik simmetriyani bildiradi. Shuning uchun hisoblashlarni sferik koordinatalarda bajarish maqsadga muvofiq. Jismning shakli sferik simmetriyaga ega bo‘lgani uchun

masalada siz ko‘rayotgan jism bu yarim shar, ya’ni geometrik jihatdan shar simmetriyasiga ega. Bunday jismda x, y, z o ‘zgaruvchilari orqali integral olish juda murakkab bo ‘ladi, chunki integrallash sohasi doira va shar sirtlari bilan chegaralangan.

Lekin sferik koordinatalarda bunday shakllar oddiy doiraviy chegaralar orqali ifodalanadi:

$$x = r sin\varphi \cdot cos\theta, \qquad y = r \cdot sin\varphi \cdot sin\theta, \qquad z = r cos\theta$$

Zichlik koordinatalar orqali quyidagicha berilgan: $\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$

Bu ifoda jismning har bir nuqtadagi zichligini ya'ni birlik hajmdagi massani ifodalaydi. $k > 0 -$ fizik doimiy birligi kg/m^4 bu zichlikning qanday tezlikda o‘sishini belgilaydi.

$$dV = r^2 sin\varphi dr d\varphi d\theta$$

Integrallash sohasi:

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Dekart koordinatalarda: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Bu nuqtaning koordinata boshidan markazdan bo‘lgan masofasining kvadrati.

Demak, zichlikni quyidagicha qayta yozish mumkin:

$$\rho = k(x^2 + y^2 + z^2) = kr^2$$

$$M = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)dV = \iiint\limits_V k^2 \cdot r^2 \cdot r^2 \cdot sin\varphi dr d\varphi d\theta =$$

$$= k \iiint\limits_V r^4 sin\varphi \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta \,;$$

Bo'laklarga ajratib hisoblaymiz:

$$M = k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\varphi \cdot d\varphi \int_0^R r^4 dr$$

Uch karrali integralni ketma-ket hisoblaymiz:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi;$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\varphi d\varphi = -cos\varphi|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1;$$

$$I_3 = \int_0^R r^4 dr = \frac{r^5}{5}$$

U holda:

$$M = k \cdot 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{2\pi k R^5}{5}$$

Bu formula sferik simmetriyaga ega, zichligi markazdan uzoqlik bo'yicha kvadratik ortadigan yarim shar jismning massasi qanday aniqlanishini ko'rsatadi. Bu ifoda uch o'lchovli integralning amaliy qo'llanilishi bo'lib, zichlikning notekis taqsimotiga ega jismlar fizikasi uchun muhimdir.

Jism sferik simmetriyaga ega bo'lgani sababli:

$$\bar{x} = 0; \;\; \bar{y} = 0$$

Fazoda zichlik markazdan bir tekisda harakat qiladi, va x, y o'qlar bo'yicha muvozanat markazi koordinata markazida qoladi.

Bu formula uch o'lchovli jismning og'irlik markazining $z-$ o'qi bo'yicha koordinatasini topish uchun ishlatiladi.

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint\limits_V z \cdot \rho(x,y,z)dV$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\iiint_V \rho \cdot cos\varphi \cdot k \cdot r^2 \cdot r^2 \cdot sin\varphi \cdot drd\varphi d\theta$$

$$= \frac{1}{M} \cdot k \cdot \iiint_V r^5 \cdot cos\varphi \cdot sin\varphi \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta$$

Uch karrali integralni ketma ket integrallaymiz:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\varphi \cdot sin\varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{2}$$

$$I_3 = \int_0^R r^5 dr = \frac{R^6}{6}$$

Shuning uchun:

$$M = \frac{2\pi k R^5}{5}$$

$$\bar{z} = \frac{\pi k R^6}{6 \cdot \frac{2\pi k R^5}{5}} = \frac{R^6}{\frac{12}{5} \cdot R^5} = \frac{5}{12}R$$

Natija:

$$\bar{x} = 0; \ \ \bar{y} = 0; \ \bar{z} = \frac{5}{12}R;$$

Zichlik markazdan uzoqlashgan sari ortib boradi bu og'irlik markazining geometrik markazdan yuqoriga siljishiga olib keladi. Oddiy bir jinsli yarim shar uchun $\bar{z} = \frac{3R}{8}$; $\bar{z} = \frac{5R}{12} > \frac{3R}{8}$ ya'ni og 'irlik yuqoriroq ko'tarilgan.

Ushbu ishda zichligi markazdan uzoqlashgan sari ortib boruvchi yarim shar shaklidagi jismning og'irlik markazi aniqlangan. Masala sferik simmetriya va zichlikning radial bog'liqligi sababli uch o'lchamli integral yordamida sferik koordinatalarda yechilgan. Hisoblashlar natijasida og'irlik markazi koordinatasi $\bar{z} = \frac{5}{12}R$ ekanligi aniqlangan. Bu qiymat, bir jinsli yarim shar uchun mavjud bo'lgan $\bar{z} = \frac{3R}{8}$ dan yuqoriroq bo'lib, zichlikning markazdan uzoqlashgani sayin ortishi og'irlik markazining yuqoriroq siljishiga olib kelishini tasdiqlaydi. Maqola zichlik taqsimotining og'irlik markazini aniqlashdagi ahamiyatini ko'rsatadi hamda uch o'lchamli integral metodining fizik modellashtirishda amaliy qo'llanilishini isbotlaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

7. Karimov E., Meliboyev A., Islomov B. Oliy matematika. 1-qism. Toshkent: "Fan va texnologiya", 2016. - 432 bet

8. Sh.R.Xurramov Oliy matematika 3-qism: Darslik, "Mehr-nuri" Toshkent-2024 - 888 bet.