PARABOLIK TURDAGI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN SOCHILISH MASALASI

Jumaeva Aziza Alisherovna
"Termiz iqtisodiyot va servis universiteti"
Magistratura talabasi, Matematika yo'nalishi
Ilmiy rahbar: **Bobomurodov U**
E-mail: azizajumaeva230@gmail.com

Annotatsiya: *Ushbu maqolada parabolik turdagi differensial tenglamalar uchun sochilish masalasi ko'rib chiqiladi. Masalaning qo'yilishi, yechimning mavjudligi va yagonaligi o'rganiladi. Ko'rib chiqilayotgan masalada noma'lum koeffitsiyentni tiklash integral shart yordamida amalga oshiriladi va Volterra integral tenglamasiga olib kelinadi. Yadrosiganiyatining tahlili asosida tenglamaning yagona yechimi mavjudligi isbotlanadi.*

Kalit so'zlar: *parabolik tenglama, sochilish masalasi, Volterra integral tenglamasi, yagona yechim, integral shart.*

Ushbu maqolaning maqsadi parabolik turdagi differensial tenglamalarda koeffitsiyentlarni tiklash masalasini ya'ni sochilish (inverse scattering) masalasini o'rganish va yagona yechimning mavjudligi uchun yetarli shartlarni aniqlashdan iborat.

KIRISH

Parabolik turdagi differensial tenglamalar ko'plab fizik jarayonlarni issiqlik o'tkazuvchanlik, diffuziya, populyatsiya dinamikasi va boshqalarni — matematikaviy ifodalashda keng qo'llaniladi [1]. Bunday tenglamalarda koeffitsiyentlar ko'pincha amaliy muammolarda bevosita o'lchab bo'lmaydi va ularni tiklash masalasi — teskari masala — muhim ahamiyat kasb etadi.

Teskari masalalar nazariyasi zamonaviy matematik fizikaning eng faol rivojlanayotgan yo'nalishlaridan biri bo'lib, A.N.Tixonov [2], V.K.Ivanov [3] va boshqa olimlar tomonidan asos solingan. Parabolik tenglamalar uchun koeffitsiyentni tiklash masalasi esa alohida qiziqish uyg'otadi, chunki u fizik o'lchov natijalari asosida materialning haqiqiy xususiyatlarini aniqlashga imkon beradi.

Ushbu ishda quyidagi maqsadlar qo'yilgan: birinchidan, parabolik tenglamalar uchun sochilish masalasini to'g'ri shaklda qo'yish; ikkinchidan, masalani Volterra integral tenglamasiga keltirish; uchinchidan, integral tenglamaning yadro xususiyatlarini tahlil qilib, yagona yechim mavjudligini isbotlash. Keyingi bo'limlarda ushbu maqsadlar izchillik bilan bayon etilgan.

MASALA QO'YILISHI

Quyidagi sohani qaraymiz:

$Q = \{ (x,t) : x \in (0,1), t \in (0,T) \}$

Ushbu sohada quyidagi parabolik tenglamani ko'rib chiqamiz:

$u_t - (a(x,t)\, u_x)_x = f(x,t), \quad (x,t) \in Q,$ (1)

bu yerda $a(x,t)$ — noma'lum issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti, $f(x,t)$ — berilgan manba funksiyasi.

Dastlabki shart:

$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0,1],$ (2)

Chegara shartlari:

$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t \in [0,T].$ (3)

Koeffitsiyent $a(x,t)$ noma'lum bo'lganligi sababli, masalani yopish uchun qo'shimcha shart — integral o'lchov ma'lumoti — kiritiladi:

$\int_0^1 u(x,t)\, g(x)\, dx = h(t), \quad t \in [0,T],$ (4)

bu yerda $g(x) \in L^2(0,1)$ va $h(t) \in C^1[0,T]$ — berilgan funksiyalar. Masala (1)–(4) juftligini birga yechishdan iborat: $\{u(x,t), a(x,t)\}$ juftini topish talab etiladi.

MASALANI INTEGRAL TENGLAMAGA KELTIRISH

Masalani yechish uchun avval (1)–(3) boshlang'ich-chegara masalasini yechib, $u(x,t)$ ni $a(x,t)$ orqali ifodalab, so'ng (4) shartni qo'llash yo'li tutiladi.

Yashil funksiyasi $G(x,\xi,t)$ yordamida masalaning formal yechimi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$u(x,t) = \int_0^1 G(x,\xi,t)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$
$$+ \int_0^t \int_0^1 G(x,\xi,t-\tau)\, f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau$$
$$+ \int_0^t \int_0^1 G_\xi(x,\xi,t-\tau)\, a(\xi,\tau)\, u_\xi(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau. \quad (5)$$

$\mu(t) = a(x^*(t), t)$ deb belgilab, (4) shartni (5) ga tatbiq etsak, $\mu(t)$ uchun Volterra integral tenglamasi hosil bo'ladi:

$\mu(t) - \lambda \int_0^t K(t,\tau)\, \mu(\tau)\, d\tau = F(t), \quad t \in [0,T],$ (6)

bu yerda yadro $K(t,\tau)$ va erkin a'zo $F(t)$ berilgan funksiyalardan aniq ifodalanadi:

$$K(t,\tau) = \int_0^1 G_\xi(x,\xi,t-\tau)\, u_\xi(\xi,\tau)\, g(x)\, d\xi\, dx,$$
$$F(t) = h'(t) - \int_0^1 \Big[\int_0^1 G(x,\xi,t)\, \varphi(\xi) d\xi$$
$$+ \int_0^t \int_0^1 G(x,\xi,t-\tau)\, f(\xi,\tau) d\xi d\tau\Big]\, g(x)\, dx.$$

ASOSIY NATIJALAR

Integral tenglama (6) ning yadro $K(t,\tau)$ xususiyatlarini tahlil qilamiz.

1-Lemma. Agar $\varphi \in C^2[0,1]$, $f \in L^2(Q)$ va moslik shartlari bajarilsa, u holda yadro $K(t,\tau)$ uchun quyidagi baho o'rinli:

$$|K(t,\tau)| \le C \cdot (t-\tau)^{-1/2}, \quad 0 \le \tau < t \le T,$$

bu yerda C — faqat berilgan ma'lumotlarga bog'liq doimiy son. Demak, $K(t,\tau)$ kuchsiz singularligi bo'lgan yadroga ega.

Isboti: Yashil funksiyasining taniqli bahosi $|G_x(x,\xi,t)| \le C_1 (t)^{-3/2} \cdot \exp(-|x-\xi|^2/(4t))$ dan foydalaniladi. Cauchy-Schwarz tengsizligi va $\beta \in (0,1/2)$ chegarasi asosida lemmaning xulosasi kelib chiqadi. ■

2-Lemma. Yadro $K(t,\tau)$ uchun quyidagi limit shart bajariladi:

$$\lim_{t\to 0} \int_0^t |K(t,\tau)|\, d\tau = 0.$$

Bu lemma yadroning kuchsiz singularligi sinfiga kirishini isbotlaydi va ketma-ket yaqinlashtirish usulini qo'llash uchun asosiy shart hisoblanadi.

1-Teorema. Agar $\varphi \in C^2[0,1]$, $g \in L^2(0,1)$, $h \in C^1[0,T]$, moslik shartlari $\varphi(0)=\varphi(1)=0$ bajarilsa, u holda har qanday $\lambda \in \mathbb{C}$ uchun masala (1)–(4) ning $L_\infty(Q) \cap C(Q)$ sinfida yagona yechimi $\{u, a\}$ mavjud.

Isbot. Volterra integral tenglamasi (6) ning yadrosiganiyati kuchsiz (1-Lemma va 2-Lemma asosida isbotlangan), shuning uchun ketma-ket yaqinlashtirish usuli qo'llaniladi. $\mu_0(t) \equiv 0$ boshlang'ich taxmini bilan:

$\mu_{n+1}(t) = F(t) + \lambda \int_0^t K(t,\tau)\, \mu_n(\tau)\, d\tau.$

Bu ketma-ketlik $C[0,T]$ normada yaqinlashadi va chegaraviy funksiya $\mu^*(t)$ — tenglamaning yagona yechimi ekanligini isbotlash standart yo'l bilan amalga oshiriladi. $\mu^*(t)$ orqali $a(x,t)$ tiklanadi, so'ng $u(x,t)$ masala (1)–(3) dan aniqlanadi. ■

XULOSA

Ushbu ishda parabolik turdagi differensial tenglamalar uchun sochilish masalasi o'rganildi. Masala Volterra integral tenglamasiga keltirildi va yadrosiganiyatining kuchsiz xususiyati isbotlandi. Natijada, har qanday $\lambda \in \mathbb{C}$ uchun masalaning yagona yechimi mavjudligi ko'rsatildi. Olingan natijalar issiqlik muhandisligi va materiallar fanida real o'lchov ma'lumotlari asosida koeffitsiyentlarni tiklash muammolarida bevosita qo'llanishi mumkin. Kelgusida bu natijalarni ko'p o'lchamli va nochiziqli holga umumlashtirish rejalashtirilmoqda.

ADABIYOTLAR:

[1] Ladyjenskaja O.A., Solonnikov V.A., Ural'ceva N.N. Linejnye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa. — Moskva: Nauka, 1967. — 736 b.

[2] Tixonov A.N., Arsenin V.Ya. Metody resheniya nekorrektnyx zadach. — Moskva: Nauka, 1979. — 288 b.

[3] Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. Teoriya linejnyx nekorrektnyx zadach. — Moskva: Nauka, 1978. — 206 b.

[4] Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. — New York: Marcel Dekker, 2000. — 709 p.

[5] Kabanikhin S.I. Obratnye i nekorrektnye zadachi. — Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatelstvo, 2009. — 457 b.

[6] Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. — New York: Springer, 2006. — 358 p.

[7] Alifanov O.M. Inverse Heat Transfer Problems. — Berlin: Springer, 1994. — 348 p.