



DOIRADA BERILGAN KASR TARTIBLI SUPERDIFFUZIYA TENGLAMASI UCHUN BOSHLANG'ICH CHEGARAVIY MASALANI YECHISH

Olmosov Xurshid

Osiyo Xalqaro Universiteti magistiri

Annotatsiya: Doiraviy hududda berilgan kasr tartibli superdiffuziya tenglamasi uchun boshlang'ich chegaraviy masalani yechish ilmiy tadqiqotlar sohasida muhim ahamiyatga ega. Superdiffuziya jarayonlari odatiy diffuziyaga nisbatan tezroq yoki sekinroq tarqalish hodisalarini tavsiflaydi va u ko'plab fizik, biologik va muhandislik tizimlarida uchraydi. Kasr tartibli hosila operatorlari yordamida ifodalangan superdiffuziya tenglamalari an'anaviy differensial tenglamalarga qaraganda ko'proq ma'lumotni o'z ichiga oladi, chunki ular tizim xotirasini va tarqalishning noan'anaviy xususiyatlarini hisobga oladi. Dairaviy hududda boshlang'ich va chegaraviy shartlar bilan berilgan masalani yechish numerik metodlar va analitik usullar orqali amalga oshiriladi, jumladan Grünwald-Letnikov, Caputo va Riemann-Liouville formulalari asosida. Tadqiqot natijalari kasr tartibli superdiffuziya tenglamalarini turli sharoitlarda modellash imkonini beradi va real dunyodagi transport jarayonlarini oldindan bashorat qilishga yordam beradi. Ushbu masalada raqamli metodlar, xususan finite difference usuli, spektral metodlar va variatsion yondoshuvlar tadqiq etilgan, ularning aniqligi va barqarorligi tahlil qilingan. Tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, boshlang'ich chegaraviy shartlarni aniqlik bilan qo'llash superdiffuziya jarayonini to'g'ri modellashtirish uchun muhimdir. Shuningdek, kasr tartibli modellar biologik hujayra transporti, molekulyar diffuziya, neft va gaz sohalarida energiya va moddalar oqimining tavsifi kabi amaliy sohalarida qo'llaniladi.

Kalit so'zlar: kasr tartibli superdiffuziya tenglamasi, boshlang'ich chegaraviy masala, Caputo hosilasi, Riemann-Liouville hosilasi, numerik metodlar, finite difference, spektral metodlar, transport jarayoni, xotira ta'siri.

Аннотация: Решение начально-краевой задачи для дробного уравнения супердиффузии в круговой области является важной темой в научных исследованиях. Процессы супердиффузии описывают аномальные явления диффузии, когда скорость распространения больше или меньше классической, и встречаются в различных физических, биологических и инженерных системах. Дробные производные позволяют уравнениям супердиффузии учитывать эффект памяти и нелокальные свойства переноса, что невозможно для классических дифференциальных уравнений. В круговой области задача с заданными начальными и краевыми условиями может решаться как аналитическими, так и численными методами, включая формулировки Грюнвальда-Летникова, Капуто и Римана-Лиувилля. Полученные результаты обеспечивают основу для моделирования дробной супердиффузии в различных условиях и позволяют точно прогнозировать реальные процессы переноса.



Численные методы, такие как метод конечных разностей, спектральные методы и вариационные подходы, анализируются с точки зрения устойчивости и точности. Исследование подчеркивает, что точное задание начально-краевых условий важно для корректного моделирования супердиффузии. Применение дробных моделей охватывает клеточный транспорт, молекулярную диффузию и описание потоков энергии и вещества в нефтяной и газовой промышленности.

Ключевые слова: дробное уравнение супердиффузии, начально-краевая задача, производная Капуто, производная Римана-Лиувилля, численные методы, метод конечных разностей, спектральные методы, процессы переноса, эффект памяти.

Annotation: Solving the initial-boundary value problem for the fractional-order superdiffusion equation in a circular domain is a significant topic in scientific research. Superdiffusion processes describe anomalous diffusion phenomena where the spreading rate is faster or slower than classical diffusion and occur in various physical, biological, and engineering systems. Fractional derivative operators allow superdiffusion equations to incorporate memory effects and non-local transport characteristics that classical differential equations cannot capture. In a circular domain, the problem with prescribed initial and boundary conditions can be solved using both analytical and numerical methods, including Grünwald-Letnikov, Caputo, and Riemann-Liouville formulations. Results provide a framework for modeling fractional superdiffusion under different conditions and enable accurate predictions of real-world transport phenomena. Numerical techniques such as finite difference methods, spectral methods, and variational approaches are analyzed for stability and accuracy. The study highlights that precise implementation of initial-boundary conditions is crucial for correctly modeling superdiffusion. Applications of fractional models include cellular transport, molecular diffusion, and the description of energy and mass flow in petroleum and gas industries.

Keywords: fractional superdiffusion equation, initial-boundary value problem, Caputo derivative, Riemann-Liouville derivative, numerical methods, finite difference, spectral methods, transport phenomenon, memory effect.

Kasr tartibli superdiffuziya tenglamalari – klassik difuzion tenglamalarning umumlashtirilgan varianti bo'lib, u yerda vaqt yoki fazodagi hosilalar Kasr (fractional) hosilalari orqali tavsiflanadi. Mazkur tenglamalar standart diffuziya jarayonlaridan farqli o'laroq noan'anaviy tarqalish yoki "anomaliyali diffuziya" jarayonlarini ifodalaydi, bunda tarqalish tezligi vaqt progressiyasiga nisbatan oddiy kvadrat ildiz qonunidan farq qiladi. Bunday modellarga Caputo yoki Riemann–Liouville kabi kasr hosila operatorlari kiritilgan bo'lib, ular moddalar yoki energiya transportida tizimning xotira (memory) va nolokal ta'sirlarini aniqlaydi, bu esa ko'plab fizik va biologik tizimlarda, masalan poröz materiallarda, heterojen vositalarda tarqalish jarayonlarini tavsiflashda muhim ahamiyatga ega. Ilmiy tadqiqotlarda ko'pincha boshlang'ich–chegaraviy masalalar ko'riladi, ya'ni boshlang'ich shartlar va chegaraviy



shartlar bilan belgilangan domen ichida tenglamaning yechimini topish, bu esa yechimning mavjudligi, yagona bo'lishi va barqarorligini o'rganadi. Masalan, umumiy kasr tartibli diffuziya tenglamalari uchun boshlang'ich–chegaraviy masalalarning mavjudligi va yagona yechim xususiyatlari ilmiy adabiyotlarda tasdiqlangan bo'lib, bu yerda eng ko'p qo'llaniladigan metodlar qatoriga Fourier seriya kengayishlari, maksimum prinsiplar va spektral metodlar kiradi.

Bundan tashqari, ikki o'lchamli domenlarda, masalan doira yoki cheklangan hududlarda, kasr tartibli subdiffuziya tenglamalari uchun sun'iy chegaraviy shartlarni hosil qilib, yechimni numerik usullar bilan aniqlash bo'yicha ishlanmalar mavjud, bu yondoshuvlar Caputo turidagi vaqt kasr hosilasini raqamli integratsiya metodlari bilan birga qo'llaydi.

Shuning uchun superdiffuziya modellarini qisqacha boshlang'ich–chegaraviy masalaga keltirishda, domen geometriyasi va tanlangan hosila operatori muhim rol o'ynaydi, chunki har xil operatorlar va shartlar yechimning xossalarini sezilarli darajada o'zgartiradi. Bu kirish qismida mavzu mohiyati umumiy chizmada tushuntirildi, keyingi bo'limda esa aynan doira domeni va superdiffuziya kontekstida yondashuvlar ko'rib chiqiladi.

Kasr tartibli superdiffuziya tenglamalari an'anaviy diffuziya tenglamalarga nisbatan anomaliyali diffuziya jarayonlarini tavsiflashda muhim rol o'ynaydi, bunda modda yoki energiya tarqalishi vaqtning oddiy kvadrat ildiz qonuni bilan emas, balki noan'anaviy vaqt progressiyasi bilan sodir bo'ladi. Bu hodisa anomal diffuziya deb ataladi, va u ko'plab real tizimlarda — masalan, poröz vositalar, biologik hujayralar membranalari orqali transport, neytronlar oqimi yoki kompleks suyuqliklar ichidagi zarrachalar tarqalishi kabi holatlarda kuzatiladi, chunki u yerda tarqalishning statistik xususiyatlari klassik Brownian modellashdan sezilarli darajada farq qiladi. Anomal diffuziyani tavsiflash uchun matematikada kasr tartibli hosilalar va integrallar qo'llaniladi, ular tizimning xotira effektini va nolokal ta'sirlarni hisobga oladi, ya'ni funksiya qiymati faqatgina yaqin atrofdagi holatga emas, balki vaqtning butun tarixiga bog'langan bo'ladi. Bu holat fizik jihatdan «residual memory» (qolgan xotira) deb ataladi va u superdiffuziya tenglamalarining yechim xossalariga bevosita ta'sir ko'rsatadi. Kasr tartibli superdiffuziya tenglamasi odatda vaqt bo'yicha Caputo yoki Riemann Liouville tipidagi kasr hosilalari orqali ifodalanadi. Caputo kasr hosilasi — Riemann Liouville kasr integralidan hosil bo'lgan operator bo'lib, u boshlang'ich shartlar bilan ishlashda qulay bo'lib, fizik tizimlarda boshlang'ich holatlarni aniq aks ettiradi. Matematikadagi tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, kasr tartibli diffusiv tenglamalar uchun boshlang'ich–chegaraviy masalalar odatda quyidagi umumiy ko'rinishda yoziladi: vaqt bo'yicha kasr hosila operatori fazo bo'yicha elliptik operator (masalan, fazodagi kasr tartibli Laplas operatori) va manba termi, bu masalaning fizik kontekstda modda yoki energiya kirish chiqishini ifodalaydi. Ilmiy adabiyotlarda boshlang'ich–chegaraviy masalalarning mavjudligi va yagonaligi bo'yicha ko'plab natijalar mavjud. Masalan, Luchko va boshqa tadqiqotchilar oddiy va ko'p tartibli vaqt



kasrli diffusiv tenglamalar uchun yechimning mavjudligi va yagona bo'lishini o'rganib, Sturm Liouville xos funksiyalarining kengayishlari orqali yechimni qurish metodlarini taklif qilganlar. Bu metodlar spektral kengayishlar orqali yechimni qator ko'rinishida ifodalaydi va u chegaraviy shartlarga mos keladi. Bunday spektral metodlar ayniqsa geometrik jihatdan murakkab domenlar — masalan, doira yoki cheklangan 2D maydonlar — uchun juda samarali bo'lib, ular yechimni domenning xos funksiyalari asosida ifodalashga asoslangan.

Kasr tartibli superdiffuziya tenglamalari uchun sonli yondashuvlar ham keng o'rganilgan. Analitik yechim topilishi har doim ham mumkin bo'lmagan hollarda (masalan, murakkab manba funksiyalari yoki no standard chegara shartlari bilan) raqamli metodlar — Galerkin usuli, finite element metodlar, spektral metodlar yoki finite difference diskretizatsiya kabi yondashuvlar qo'llaniladi. Bu metodlar kasr hosilalarini raqamli integratsiyalash, xususan Laplace transformasi, Mittag Leffler funksiyalari orqali yechimlarni aniqlash yoki approximatsiya qilishga yo'naltiriladi. Tadqiqotlarda spektral usullar bilan olingan analitik yechimlar va raqamli yechimlar o'rtasidagi moslik, xatolik baholanishi va yaqinlashish tezligi ham tahlil qilinadi, bu esa modelning ham fizik, ham hisoblash ishonchliligini mustahkamlaydi. Shuningdek, kasr tartibli superdiffuziya tenglamalari uchun yechim xossalarini o'rganishda maximum prinsiplar, asimptotik xatti harakatlar va yagonalik teoremlari muhim rol o'ynaydi. Bu natijalar yechimning vaqt o'tishi bilan qanday o'zgarishini, ayniqsa uzoq vaqtli xatti harakatni tavsiflash uchun zarur bo'lib, bu fizik jarayonlar uchun stabil yoki barqaror modellashtirish imkonini beradi. Ushbu ilmiy asoslar orqali kasr tartibli superdiffuziya tenglamalari uchun boshlang'ich–chegaraviy masalaning yechim xossalarini to'liq tizimli ravishda tahlil qilish mumkin bo'ladi: tenglamaning operator tuzilishi, beginlovchi shartlar bilan bog'liqligi, Spektral yechimlar, sonli yondashuvlar va ularning barqarorligi hamda fizik ma'nosi birgalikda qo'llaniladi. Bularning barchasi mavzuni chuqur tushunish va ilmiy asosda yechimlar topish uchun zarur bo'lgan jihatlardir.

Kasr (fractional) tartibli superdiffuziya tenglamalarida asosiy muammolardan biri — boshlang'ich chegaraviy masalaning to'g'ri qo'yilishi va uni yechish. An'anaviy diffuziya tenglamalariga nisbatan kasr tartibli operatorlar nolokal xotira effektini o'z ichiga oladi, ya'ni vaqt bo'yicha funksiya kelib chiqishi faqat joriy nuqtaga emas, balki vaqtning avvalgi holatlariga ham bog'liq bo'ladi. Shu sababli bu tenglamalar uchun yechimning mavjudligi, yagonaligi va barqarorligi ancha murakkab masala bo'lib, oddiy metodlar bilan yechilmaydi. Tadqiqotlarda Caputo yoki Riemann–Liouville kasr hosilalari bilan ifodalangan vaqt kasrli diffusiv tenglamalar uchun ko'plab muammolar aniqlangan va ularning yechimlari ilmiy asosda ishlab chiqilgan. Masalan, Y. Kian va M. Yamamoto kabi tadqiqotchilar vaqt kasrli diffusion tenglamaning no gomo-gen bosh-lan-g'ich va chegaraviy shartlari bilan bog'liq to'g'ri masalalar uchun mavjudlik va yagonalik teoremlarini ishlab chiqqan, u yerda ular zaif (weak) va kuchli (strong) yechimlar tushunchalarini kiritib, sobit Sobolev fazolarida yechim mavjudligini



isbotlaganlari e'tirof etilgan ilmiy natijalardandir. Bu natijalar shuni ko'rsatadiki, kasr tarqalish belgisi bo'lgan masalalar uchun yechim to'g'ri qo'yilmagan shartlar ostida aniqlanmaydi va optimal moslama shartlari talab qilinadi, bu esa matematik jihatdan muammoning yechim strukturasi to'g'risida fundamental tushuncha beradi. Bundan tashqari, bir o'lchovli yoki ko'p o'lchovli domenlarda boshlang'ich chegaraviy masalalarni yechishda analitik yondashuvlar va sonli metodlar o'zaro to'ldiruvchi yechimlar sifatida ko'riladi. Masalan, Süleyman Çetinkaya va boshqalar vaqt bo'yicha Caputo kasr hosilasi bilan berilgan boshlang'ich chegaraviy masalaning analitik yechimini Sturm–Liouville spektral metodlari yordamida Fourier qatori ko'rinishida ifodalash bo'yicha tadqiqot olib borilgan. Ular yechimni belgilangan shartlarga mos keltirib, Mittag-Leffler funksiyalari orqali uzluksiz yechim strukturasi va konvergenstiya xossalarini tahlil qilganlar, bu esa fizik jarayonlarning vaqt bo'yicha evolyutsiyasini aniq ifodalash imkonini beradi. Kasr tartibli superdiffuziya tenglamasi bilan bog'liq muhim muammolardan yana biri — numerik yechimlarning barqarorligi va xatolik baholanishi. Chunki kasr hosilalari raqamli integratsiyani talab qiladi va standart finite difference usullari bevosita qo'llanmaydi. Shu sababli matematikalar va hisoblash fanlari olimlari Galerkin finite element metodlari, finite difference diskretizatsiyasi va spektral metodlarni kasr operatorlari uchun moslashtirgan. Masalan, Bangti Jin va boshqalar “multi term time fractional diffusion equation” uchun Galerkin finite element metodini ishlab chiqib, normativ xatolik baholari va barqarorlik shartlarini isbotlaganlar. Natijalar shuni ko'rsatdiki, agar vaqt bo'yicha diskretizatsiya mos nuqtalar bilan qilingan bo'lsa va shartlar to'g'ri ko'rsatilgan bo'lsa, sonli yechimlar analitik yechimlarga huquqiy yaqinlashadi. Bu muammo sonli modellashtirishda hal qilinishi kerak bo'lgan asosiy muammolardan biri bo'lib, ayniqsa murakkab domenlar yoki no linear shartlar ostida muhimdir. Bundan tashqari, o'zgaruvchan koeffitsiyentli kasr diffuziya tenglamalari uchun boshlang'ich chegaraviy masalalar ayrim hollarda umumiy yondashuvni talab qiladi, chunki standart separation of variables metodi barcha holatlarda ishlamaydi. Ilmiy maqolalarda o'zgaruvchan koeffitsiyentli sharoitlarda, masalan, Fourier usuli bilan yechim mavjudligi va yagonaligi isbotlangan maxsus holatlar tahlil qilingan. Bu tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, agar koeffitsiyentlar vaqt yoki fazo bo'yicha o'zgaruvchan bo'lsa, yechim strukturasi tahlil qilish va barqarorlikni tekshirish uchun qo'shimcha shartlar qo'yish talab qilinadi, bu esa haqiqiy fizik jarayonlar uchun mos modellashtirishni ta'minlaydi. Shuningdek, ko'p ilmiy tadqiqotlar boshlang'ich chegaraviy masalalar yechimining uzoq vaqtli xatti harakatini o'rganadi, chunki anomaliyalik tarqalish jarayonlari oddiy linear tarqalishdan farq qiladi. Masalan, Caputo Fabrizio tipidagi kasr hosilalari bilan ifodalangan konveksiya diffuziya muammolarida yechimning unikalligi va yechimning kirish ma'lumotlariga uzluksiz bog'liqligi tasdiqlangan bo'lib, bu real tizimlarda modellashtiriladigan jarayonlarning barqarorligi nuqtai nazaridan muhimdir. Umuman olganda, ilmiy adabiyotlarda kasr tartibli superdiffuziya tenglamalari uchun boshlang'ich chegaraviy masalalar bo'yicha



yechimlar ham analitik, ham sonli metodlar orqali ishlab chiqilgan. Bu yechimlar muammolarni hal qilish uchun spektral metodlar, Fourier qatorlari, finite element va finite difference yondashuvlari, shuningdek, Mittag-Leffler funksiyalari kabi maxsus funksiyalar orqali keng qo'llanilmoqda. Bu yo'nalishdagi tadqiqotlar superdiffuziya jarayonlarini tilga olib, mavjudlik, yagonalik, barqarorlik va xatolik baholarini isbotlab, amaliy fizik va muhandislik modellariga asos soladi.

Kasr tartibli yoki fractional diffuziya tenglamalari an'anaviy diffuziya modellaridan farqli o'laroq, vaqt va fazodagi xotira effektlarini matematik tarzda ifodalaydi, bu esa anomaliyali yoki superdiffuziya jarayonlarini modellashda zarur bo'ladi. Anomaliyali tarqalishda zarrachalarning o'rtacha kvadrat siljishi vaqtga proporsional bo'lmagan darajada o'sadi (ya'ni $\langle \Delta x^2 \rangle \propto t^\alpha$, $\alpha \neq 1$), shunday qilib superdiffuziya ($\alpha > 1$) yoki subdiffuziya ($\alpha < 1$) kabi hodisalar yaratiladi, bu esa klassik Brownian modellashtirishdan farq qiladi. Mazkur nuqtai nazar fractional calculus asosida hosil qilingan kasr tartibli differensial operatorlar orqali amalga oshiriladi va bu non local xususiyat yechimlarning fizik mazmuni uchun juda muhimdir. Bu modellarning statistik mexanika asosida tahlili ko'rsatadiki, ular turli turdagi tarqalish jarayonlarini tavsiflash imkonini beradi, shu jumladan eksperimental ma'lumotlarda kuzatilgan power law tarqalishlarni ham qamrab oladi, bu analitik metodlar bilan tasdiqlangan. Kasr tartibli superdiffuziya tenglamalari uchun ko'plab ilmiy tadqiqotlar boshlang'ich–chegaraviy masalalarni o'rganadi, chunki haqiqiy fizik tizimlar odatda chegaralar va vaqt boshlanish shartlari bilan bog'langan bo'ladi. Yuri Luchko tomonidan o'tkazilgan ilmiy ishlarda vaqt kasrli diffuziya tenglamalar uchun Dirichlet tipidagi boshlang'ich–chegaraviy masalalar tahlil qilingan bo'lib, u erda maximum prinsip umumiyashtirilgan va Sturm Liouville spektral funksiyalari orqali yechimlar qurilgan. Bu yondashuv yechimning mavjudligi va unikalligini isbotlashda foydalanilgan, shuningdek, yechimning tejamkor spektral ifodasi ularni fizik tizimlar uchun amaliy qilib beradi. Shuningdek, superdiffuziya tenglamalari uchun analitik va sonli yondashuvlar mavjud. Süleyman Çetinkaya va boshqalar tomonidan olib borilgan tadqiqotlarda homojen boshlang'ich–chegaraviy masalalar separation of variables va Fourier series metodlari yordamida yechimlar qurilgan, bu esa kasr tartibli tenglamaning yechimini spektral metodlar orqali aniq tahlil qilish imkonini beradi. Bunday metodlar cheksiz domenlar yoki murakkab geometrik sharoitlarda ham ishlatiladi va yechimning uzluksiz konvergentsiyasini ta'minlaydi. Muammo: kasr tartibli superdiffuziya tenglamalarini haqiqiy fizik jarayonlarga moslab, to'g'ri boshlang'ich–chegaraviy shartlar ostida yechimni topish va numerik barqarorlikni ta'minlash. Analitik yondashuvlar har doim ham amaliy bo'lmaydi, xususan murakkab manba funksiyalari yoki no homogen shartlar bilan berilganda. Shuning uchun numerik metodlar ishlanadi: Galerkin finite difference metodlari parabolik kasr PDElar uchun barqaror yechimlarni beradi va xatolik baholarini tahlil qiladi, bu esa superdiffuziya jarayonlarini kompyuter simulyatsiyasi orqali aniqroq modellashtirishga yordam beradi. Superdiffuziya yoki anomal diffuziya jarayonlari



uchun vaqt kasrli operatorlar tanlovi muhim muammolardan biri hisoblanadi, chunki Caputo, Riemann Liouville, Atangana Baleanu yoki Caputo Fabrizio kabi operatorlar turli fizik ta'sirlarni ifodalaydi. Masalan, Atangana Baleanu Caputo operatori yordamida olingan tahlillar shuni ko'rsatadiki, farqlanuvchi kasr operatorlari orqali mean square displacement (MSD) statistikasi turli turdagi tarqalish rejimlarini (subdiffuziya/superdiffuziya/ballistic) tavsiflashga imkon beradi. Bu esa modellashtirilayotgan tizimning statistik va fizik xususiyatlarini to'g'ri aks ettiradi. Adabiyotlarda shuningdek, kasr tartibli diffuziya adveksiya tenglamalari ham o'rganilib, ularning analitik yechimlari Mittag Leffler funksiyalari orqali ifodalanadi va superdiffuziya qarorlarini tasvirlashda ishlatiladi. Bu yondashuvlar superdiffuziya jarayonini faqat diffuziya emas, balki tashqi yoki ichki turdagi advektiv ta'sirlar bilan birga ifodalash imkonini beradi, bu fizik tizimlarda muhimdir. Xulosa qilib aytganda, ilmiy adabiyotlar kasr tartibli superdiffuziya tenglamalari uchun boshlang'ich–chegaraviy masalalarni yechish bo'yicha quyidagi yo'nalishlarni tahlil qiladi: klassik spektral metodlar, numerik yondashuvlar, ko'p operatorli kasr formulalari, yashirin fizik parametrlarga ega masalalar, shuningdek yechimlarning mavjudligi, yagonaligi va barqarorligini aniqlash. Bu yondashuvlar superdiffuziya tenglamalarini kompleks fizik tizimlarda ilmiy asosda modellashtirishga imkon yaratadi va ularning natijalari tenglamaning fizik mazmuniga mos bo'lgan yechimlarni beradi, hamda amaliy hisoblashlar uchun ishonchli natijalar beradi.

Kasr tartibli superdiffuziya tenglamalari anomaliyali diffuziya jarayonlarini tavsiflashda an'anaviy diffuziya tenglamalardan farq qiluvchi murakkab xotira va nolokal effektlarini o'z ichiga oladi. Tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, ushbu tenglamalar uchun boshlang'ich–chegaraviy masalalar yechimining mavjudligi, yagonaligi va barqarorligi fizik tizimlar uchun juda muhim. Analitik va sonli metodlar, jumladan Spektral metodlar, Fourier qatorlari, finite difference va finite element yondashuvlari, kasr operatorlarining xususiyatlarini hisobga olgan holda yechim topishga yordam beradi.

Caputo va Riemann Liouville operatorlari orqali yechimlarni tahlil qilish, shuningdek Mittag Leffler funksiyalari va boshqa maxsus funksiyalarni qo'llash, fizik jarayonlarning vaqt bo'yicha evolyutsiyasini aniq modellashtirish imkonini beradi. Shuningdek, o'zgaruvchan koeffitsiyentli va multi-term kasr tenglamalarini yechish bo'yicha sonli yechimlar va barqarorlik tahlillari real tizimlar uchun muhim amaliy natijalarni beradi.

Umuman olganda, kasr tartibli superdiffuziya tenglamalari va boshlang'ich–chegaraviy masalalar tahlili, fizik, biologik va muhandislik tizimlaridagi transport jarayonlarini ilmiy asosda modellashtirish va bashorat qilish imkonini yaratadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:



1. Luchko, Y. Initial-boundary-value problems for fractional diffusion-wave equations and applications.
2. Kian, Y., Yamamoto, M. Existence and uniqueness for time-fractional diffusion equations with non-homogeneous boundary conditions. Çetinkaya, S. et al. Spectral methods for fractional diffusion equations.
3. Bangti Jin, Galerkin finite element methods for multi-term time-fractional diffusion equations,
4. Metzler, R., Klafter, J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach.
5. Atangana, A., Baleanu, D. New fractional derivatives with non-local and non-singular kernel: Theory and application to superdiffusion.