



TO'G'RI TO'RTBURCHAKDA BUZILADIGAN ELLIPTIK TIPDAGI TENGLAMA UCHUN SPEKTRAL MASALA

Usmonov D. A

Turdiyeva K. O

Farg'ona Davlat universiteti

Abstract: Ushbu maqolada to'g'ri to'rtburchak sohada buziladigan elliptik tipdagi tenglama uchun Drixle-Neyman shartli spektral masala o'rganilgan. Bu masalaning sanoqli sondagi musbat xos sonlari mavjud ekanligi ko'rsatilgan. Bu xos sonlarga mos xos funksiyalar sistemasi ortogonal ekanligi isbotlangan.

Kalit so'zlar: buziladigan elliptik tenglama, spektral masala, Drixle-Neyman shartlari, xos sonlar, xos funksiyalar, integral tenglama.

KIRISH

So'nggi yillarda buziladigan va singulyar koeffitsiyentlarga ega bo'lgan elliptik tipdagi differensial tenglamalar uchun chegaraviy va spektral masalalarni o'rganish matematik fizika va funksional analizning muhim yo'nalishlaridan biri hisoblanadi. Bunday tenglamalar issiqlik o'tkazuvchanlik, diffuziya jarayonlari, geterogen muhitlar nazariyasi hamda fazoviy nomutanosiblikka ega fizik modellarni tavsiflashda uchraydi.

Buziladigan elliptik tipdagi tenglamalar uchun spektral masalalar ko'pincha klassik usullarni bevosita qo'llash imkonini bermaydi va maxsus integral tenglamalar usuli, Grin funksiyasi nazariyasiga asoslanadi.

2 Adabiyotlar tahlili

Elliptik tipdagi differensial tenglamalar uchun spektral masalalar nazariyasi klassik matematik analiz va matematik fizikaning muhim bo'limlaridan biridir. Shturm-Liouville masalalari uchun asosiy spektral xossalari va xos funksiyalar sistemalarining to'laligi masalalari Smirnov hamda Tikhonov va Samarskiy ishlarida keng yoritilgan.

Buziladigan koeffitsiyentlarga ega masalalar esa alohida murakkablikka ega bo'lib, bunday tenglamalar uchun spektral tahlil integral tenglamalar nazariyasi bilan bog'liq holda olib boriladi. Simmetrik yadroli integral tenglamalar nazariyasining asosiy natijalari Kolmogorov va Fomin monografiyasida tizimli tarzda bayon qilingan.

So'nggi yillarda buziladigan elliptik tenglamalar uchun chegaraviy va spektral masalalar turli geometriyadagi sohalarda faol o'rganilmoqda. Mazkur dissertatsiya ishida olingan natijalar yuqoridagi tadqiqotlarni davom ettirgan holda Drixle-Neyman va Drixle shartlar ostida xos sonlar va xos funksiyalar strukturasi o'rganiladi va aniqlashtiriladi.

3 Masala qo'yilishi

$\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ to'g'ri to'rtburchak soha chegaralarida buziladigan elliptik tipdagi ushbu



$$\left[x^\alpha (1-x)^\beta u_x(x,y) \right]_x + u_{yy}(x,y) + \lambda u(x,y) = 0, \quad (1)$$

tenglamani qaraymiz, bu yerda $u(x,y)$ noma'lum funksiya, λ -spektral parametr, α, β berilgan haqiqiy sonlar bo'lib, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$.

DN_λ masalasi. λ parametrning shunday qiymatlarini va ularga mos keladigan $u(x,y)$ funksiya noldan farqli bo'lib, quyidagi xossalarga ega bo'lsin:

$$1) u(x,y), \left[x^\alpha (1-x)^\beta u_x(x,y) \right], u_y(x,y) \in C(\overline{\Omega}); \left[x^\alpha (1-x)^\beta u_x(x,y) \right]_x u_{yy}(x,y) \in C(\Omega).$$

2) Ω sohada $u(x,y)$ funksiya (1) tenglamani qanoatlantiradi.

3) Ω soha chegarasida quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi:

$$u(x,1) = 0, \left[(1-x)^\beta u_x(x,y) \right]_{x=0} = 0, x \in [0,1]; \quad (2)$$

$$u(1,y) = 0, u_y(x,0) = 0, y \in [0,1]. \quad (3)$$

4 Asosiy natijalar

1-teorema. Agar $\lambda \leq 0$ bo'lsa, u holda DN_λ masalasining noldan farqli yechimga ega emas.

Isbot. Faraz qilaylik, DN_λ masala $u(x,y) \neq 0$ yechimga ega bo'lsin. (1) tenglamani $u(x,y)$ ga ko'paytiramiz va Ω soha bo'yicha integrallaymiz:

$$\int_{\Omega} \left(\left[x^\alpha (1-x)^\beta u_x(x,y) \right]_x u + u_{yy} u + \lambda u^2 \right) dx dy = 0.$$

Bu tenglikni ushbu

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \left[x^\alpha (1-x)^\beta u_x(x,y) \right]_x u dx + \int_0^1 dx \int_0^1 u u_{yy} dy + \lambda \int_{\Omega} u^2 dx dy = 0.$$

Birinci va ikkinchi integrallarni mos holda x va y bo'yicha bo'laklab integrallab, (2), (3) shartlarni hisobga olib, quyidagi natijaga ega bo'lamiz:

$$\int_{\Omega} \left[x^\alpha (1-x)^\beta u_x^2 + u_y^2 \right] dx dy = \lambda \int_{\Omega} u^2 dx dy.$$

Bu tenglikni chap tomoni nomanfiy va

$$\int_{\Omega} u^2 dx dy > 0$$

ekanligidan $\lambda \geq 0$ bo'lishi kelib chiqadi.

Endi $\lambda = 0$ bo'lsin. Undan esa

$$\int_{\Omega} \left[x^\alpha (1-x)^\beta u_x^2 + u_y^2 \right] dx dy = 0$$



bo'lishi kelib chiqadi. Bu tenglik bajarilishi uchun

$$\int_{\Omega} \int x^{\alpha} (1-x)^{\beta} u_x^2 dx dy = 0, \quad \int_{\Omega} \int u_y^2 dx dy = 0.$$

bo'lishi kerak.

Bu tengliklar bajarilishi uchun $u_x(x, y) \equiv 0$ va $u_y(x, y) \equiv 0$ bo'lishi kerak. Bu tengliklarda $u(x, y) \equiv \text{const}$ ekanligi kelib chiqadi. $u(1, y) = 0$, $u(x, 1) = 0$, chegaraviy shartlardan foydalanib, $u(x, y) \equiv 0$ ekanligini topamiz. Bundan esa $\lambda = 0$ soni DN_{λ} masalaning xos soni emas.

1-teorema isbotlandi.

2-teorema. DN_{λ} masalasining $\lambda_{nk} > 0$ ($n, k \in N$) xos sonlari mavjud.

Isbot. $u(x, y)$ funksiyani $u(x, y) = V(x)Q(y)$ ko'rinishida izlaymiz. Buni (1) tenglamaga qo'yamiz:

$$\frac{[x^{\alpha} (1-x)^{\beta} V'(x)]'}{V(x)} + \frac{Q''(y)}{Q(y)} - \lambda = 0.$$

Bu tenglamani quyidagicha ko'rinishda yozib olamiz:

$$-\frac{[x^{\alpha} (1-x)^{\beta} V'(x)]'}{V(x)} = \frac{Q''(y)}{Q(y)} - \lambda = \mu,$$

bu yerda μ ajratish koeffitsiyenti.

Bulardan foydalanib, quyidagi ikkita spektral masalalarni hosil qilamiz:

$$[x^{\alpha} (1-x)^{\beta} V'(x)]' = -\mu V, \quad V(1) = 0, \quad [(1-x)^{\beta} V'(x)]|_{x=0} = 0; \quad (4)$$

$$Q''(y) - (\mu - \lambda)Q(y) = 0, \quad Q(1) = 0, \quad Q'(0) = 0. \quad (5)$$

Dastlab (4) masalani yechimini topamiz. Ko'rsatish qiyin emaski $\mu \leq 0$ da (4) masalaning xos sonlari mavjud emas. $\mu > 0$ holda masalani integral tenglamaga keltiramiz. Grin funksiyalar usulidan foydalanib, bu masalani quyidagi simmetrik yadroli integral tenglamaga ekvivalent keltiramiz:

$$V(x) = \mu \int_0^1 G(x, s) V(s) ds \quad (6)$$

bu yerda

$$G(x, s) = \begin{cases} \int_0^x z^{-\alpha} (1-z)^{-\beta} dz, & x < s, \\ \int_0^s z^{-\alpha} (1-z)^{-\beta} dz, & s < x. \end{cases} \quad (7)$$



$G(x, s) = G(s, x)$ bo'lganidan, simmetrik yadroli integral tenglamalar nazariyasiga ko'ra (6) integral tenglama yoki (4) spektral masala sanoqli sondagi xos sonlarga ega bo'lib, ularni quyidagi ko'rinishda yozib olish mumkin:

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots \leq \mu_k \leq \dots \quad k \in N$$

Bu xos sonlarga mos xos funksiyalar $V_k(x)$ ko'rinishda bo'lib, ular $L_2[0,1]$ fazoda ortogonal bo'ladi.

Endi (5) masalaga o'tamiz. $\mu - \lambda = -\sigma$ deb belgilash kiritib,

$$Q''(y) + \sigma Q(y) = 0, \quad Q(1) = 0, \quad Q'(0) = 0 \quad (8)$$

ko'rinishda masalani hosil qilamiz. Bu tenglamani $Q(y) \neq 0$ ga ko'paytirib, $[0,1]$ oraliqda integrallaymiz:

$$\int_0^1 (QQ''(y) + \sigma Q^2(y)) dy = 0 \quad (9)$$

Ko'rsatish qiyin emaski, $\sigma = 0$ da (8) tenglamaning xos sonlari mavjud emas. Endi $\sigma > 0$ da tenglamani yechimini topamiz va uni quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$Q(y) = C \sin(\sqrt{\sigma}y) + D \cos(\sqrt{\sigma}y),$$

bu yerda C va D ixtiyoriy o'zgarmas haqiqiy sonlar.

Bu yechimni chegaraviy shartlarga qo'yib,

$$C = 0, \quad \sigma_n = (\pi/2 + \pi k)^2$$

$\mu - \lambda = -\sigma$ ekanligidan DN_λ masalaning xos sonlarini

$$\lambda_{n,k} = \mu_k + \sigma_n, \quad k \in N, n \in \{0\} \cup N \quad (10)$$

ko'rinishda topamiz.

2-teorema isbotlandi.

(10) ga mos xos funksiyalar sistemasi esa

$$u_{n,k} = \sqrt{2} \cos[(\pi/2 + \pi k)y] V_k(x) \quad (11)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu (11) funksiyalar sistemasi $L_2(\Omega)$ da ortogonal bo'ladi.

5 Xulosa

Mazkur maqolada birlik to'rtburchak sohada aniqlangan, koeffitsiyentlari chegarada buziladigan elliptik tipdagi differensial tenglama uchun Drixle-Neyman shartli spektral masala tadqiq qilindi. Masalaning matematik qo'yilishi berilib, uning asosiy spektral xossalari qat'iy isbotlar asosida o'rganildi.

Avvalo, spektral parametrning nomanfiy qiymatlarida masalaning noldan farqli yechimga ega emasligi ko'rsatildi va $\lambda = 0$ qiymat xos son emasligi isbotlandi. Ajratish usulidan foydalanib, ikki mustaqil bir o'lchamli spektral masalaga keltirish amalga oshirildi va ular asosida masalaning musbat xos sonlari mavjudligi aniqlashtirildi.

Shuningdek, Grin funksiyasi yordamida hosil qilingan simmetrik yadroli integral tenglama orqali xos sonlar sanoqli ekanligi va ularning chegaralanmagan o'suvchi



ketma-ketlik hosil qilishi isbotlandi. Mos xos funksiyalar sistemasining $L_2(\Omega)$ fazoda ortogonalligi ko'rsatildi.

Olingan natijalar buziladigan elliptik tenglamalar uchun spektral masalalar nazariyasini rivojlantirishga xizmat qiladi hamda murakkab chegaraviy shartlarga ega matematik fizika modellarini tahlil qilishda qo'llanishi mumkin.

REFERENCES:

1. A.N.Kolmogorov, S.V. Fomin. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Moscow: Nauka, 1976.
2. V.I. Smirnov. A Course of Higher Mathematics, Vol. IV. Moscow: Nauka, 1981.
3. S.G. Mikhlin. Variational Methods in Mathematical Physics. Oxford: Pergamon Press, 1964.
4. A.N. Tikhonov, A.A. Samarskii. Equations of Mathematical Physics. New York: Dover Publications, 1990.