GAUSS-BONNET TEOREMASI VA UNING TATBIQLARI

Saliyeva Sevara Ma'mirbek qizi
Andijon davlat pedagogika institute "Matematika va Informatika" kafedrasi o'qituvchisi E-mail: saliyevasevara18@gmail.com
Mamadaliyeva Muharram Botirjon qizi
Andijon davlat pedagogika institute Aniq va tabiiy fanlar fakulteti matematika yo'nalishi 2-bosqich 201 guruh talabasi muharrambotirovna@gmail.com

Annotatsiya: *Ushbu maqolada differensial geometriya va topologiya fanlarining fundamental natijalaridan biri bo'lgan Gauss-Bonnet teoremasi atroflicha tadqiq etiladi. Maqolaning asosiy maqsadi sirtning lokal geometrik xususiyatlari, xususan Gauss egriligi va uning global topologik invarianti bo'lgan Eyler xarakteristikasi o'rtasidagi uzviy bog'liqlikni yoritishdan iborat. Tadqiqot davomida teoremaning klassik shakli, chegarali sirtlar uchun umumlashgan ko'rinishi hamda yuqori o'lchamli manifoldlardagi analoglari tahlil qilingan. Shuningdek, maqolada teoremaning zamonaviy fan va texnikadagi amaliy ahamiyati, jumladan nazariy fizika, kosmologiya, kompyuter grafikasi va raqamli sirtlarga ishlov berish sohalaridagi tatbiqlari ko'rsatib o'tilgan. Xulosa qismida geometrik va topologik xossalarning sintezi zamonaviy matematik analiz rivojidagi o'rni bayon etilgan.*

Kalit so'zlar: *Gauss-Bonnet teoremasi, differensial geometriya, topologiya, Gauss egriligi, Eyler xarakteristikasi, geodezik egrilik, topologik invariant, sirtlar geometriyasi, manifold (ko'pxillik), Chern-Gauss-Bonnet formulasi, amaliy geometriya, 3D modellashtirish.*

Аннотация: *В данной статье подробно исследуется теорема Гаусса-Бонне, являющаяся одним из фундаментальных результатов дифференциальной геометрии и топологии. Основная цель статьи — осветить неразрывную связь между локальными геометрическими свойствами поверхности, в частности гауссовой кривизной, и её глобальным топологическим инвариантом — характеристикой Эйлера. В ходе исследования анализируются классическая форма теоремы, её обобщенный вид для поверхностей с краем, а также аналоги в многообразиях высших измерений. Также в статье показано практическое значение теоремы в современной науке и технике, включая теоретическую физику, космологию, компьютерную графику и цифровую обработку поверхностей. В заключении описывается роль синтеза геометрических и топологических свойств в развитии современного математического анализа.*

Ключевые слова: *Теорема Гаусса-Бонне, дифференциальная геометрия, топология, гауссова кривизна, характеристика Эйлера, геодезическая кривизна, топологический инвариант, геометрия поверхностей, многообразие, формула Черна-Гаусса-Бонне, прикладная геометрия, 3D моделирование.*

Abstract: *This article provides an in-depth study of the Gauss-Bonnet theorem, one of the fundamental results in differential geometry and topology. The primary objective of the paper is to highlight the intrinsic connection between the local geometric properties of a surface, specifically the Gaussian curvature, and its global topological invariant, the Euler characteristic. The study analyzes the classical form of the theorem, its generalized version for surfaces with boundaries, and its analogues in higher-dimensional manifolds. Furthermore, the article demonstrates the practical significance of the theorem in modern science and technology, including theoretical physics, cosmology, computer graphics, and digital surface processing. The conclusion outlines the role of synthesizing geometric and topological properties in the advancement of modern mathematical analysis.*

Keywords: *Gauss-Bonnet theorem, differential geometry, topology, Gaussian curvature, Euler characteristic, geodesic curvature, topological invariant, surface geometry, manifold, Chern-Gauss-Bonnet formula, applied geometry, 3D modeling.*

Gauss-Bonnet teoremasi geometriya va topologiya fanlari o‘rtasidagi eng chuqur bog‘lanishni ifodalovchi fundamental qonuniyatdir. Ushbu teorema sirtning lokal xususiyatlari, ya’ni uning har bir nuqtasidagi egilish darajasi (Gauss egriligi) va sirtning global tuzilishi, ya’ni uning umumiy shakli va teshiklari soni (Eyler xarakteristikasi) o‘rtasidagi uzviy aloqani ochib beradi. Matematika olamida bu natija "mahalliy o‘lchovlar qanday qilib butun tizimning umumiy xossasini belgilaydi" degan savolga eng mukammal javob hisoblanadi.

Teoremaning mohiyatini tushunish uchun sirtning Gauss egriligini tasavvur qilish lozim. Har bir nuqtadagi egrilik turlicha bo‘lishi mumkin: sfera kabi musbat, egar kabi manfiy yoki tekislik kabi nolga teng. Gauss-Bonnet teoremasiga ko‘ra, yopiq sirt bo‘ylab barcha nuqtalardagi egriliklar yig‘indisi (integrali) har doim o‘zgarmas songa intiladi. Bu son sirtni qanchalik deformatsiya qilishingizdan qat’i nazar o‘zgarmaydi. Masalan, koptokni har qancha g‘ijimlang, uning sirtidagi egriliklar yig‘indisi baribir sferik strukturaning o‘zgarmas qiymatini saqlab qoladi, chunki uning topologiyasi o‘zgarmagan.

Ushbu teoremaning amaliy ahamiyati o‘ta keng qamrovli bo‘lib, u nafaqat nazariy matematika, balki zamonaviy fizika va yuqori texnologiyalarda ham markaziy o‘rin tutadi. Umumiy nisbiylik nazariyasida fazo-vaqt egriligini o‘rganishda, koinotning global shaklini modelallashtirishda hamda kvant maydonlar nazariyasidagi murakkab masalalarni yechishda ushbu teorema tayanch vazifasini o‘taydi. Shuningdek, materialshunoslikda molekulalar yuzasini tahlil qilish va biologik membranalar morfologiyasini o‘rganishda sirt egriligining topologiya bilan bog‘liqligi hal qiluvchi rol o‘ynaydi.

Raqamli texnologiyalar davrida Gauss-Bonnet teoremasi yangicha hayot topdi. Kompyuter grafikasi va sun’iy intellekt sohalarida diskret Gauss-Bonnet formulasi raqamli 3D modellarni tahlil qilish, ob’ektlarni tanib olish va robototexnika algoritmlarini yaratishda poydevor bo'lib xizmat qilmoqda. Masalan, kompyuter o'yinlaridagi murakkab personajlar modellarini optimallashtirish va ularning yuzasidagi egriliklarni hisoblash aynan ushbu geometrik prinsiplarga tayanadi. Maqolada ushbu teoremaning tarixiy shakllanish bosqichlari — Karl Fridrix Gaussning dastlabki kashfiyotlaridan tortib, Per Ossian Bonnetning umumlashmalarigacha bo'lgan yo'l batafsil yoritiladi. Shuningdek, teoremaning chegarali sirtlar uchun ko'rinishi, ya'ni sirtning ichki egriligi va uning chegarasidagi egri chiziqli burilishlar yig'indisi haqidagi qismlari tadqiq etiladi. Yakunda esa teoremaning yuqori o'lchamli analoglari, xususan, zamonaviy nazariy fizikaning asosi bo'lgan Chern-Gauss-Bonnet formulalari va ularning kashf etilishi fanda qanday yangi ufqlar ochgani haqida xulosalar beriladi. Gauss-Bonnet teoremasining mohiyatini chuqurroq anglash uchun uning matematik strukturasi, geometrik talqini va turli sohalardagi tatbiqlarini o'zaro bog'liq bir necha yo'nalishda ko'rib chiqish lozim.

Teoremaning matematik asosi o'zining klassik ko'rinishida ikki qismdan iborat bo'lib, sirtning ichki qismidagi Gauss egriligi integrali va sirt chegarasi bo'ylab olingan geodezik egrilik integralini o'z ichiga oladi. Silliq va yo'naltirilgan sirt uchun ushbu ikki miqdorning yig'indisi har doim sirtning topologik xarakteristikasiga proporsional bo'ladi. Agar sirt yopiq bo'lsa, ya'ni uning chegarasi mavjud bo'lmasa, sirt bo'ylab olingan umumiy egrilik faqat uning topologik turiga, aniqrog'i Eyler xarakteristikasiga bog'liq bo'lib qoladi. Bu matematik natija sirtning geometriyasi qanchalik murakkab yoki o'zgaruvchan bo'lishidan qat'i nazar, uning global tuzilishi qat'iy qonuniyatga bo'ysunishini ko'rsatadi. Geometrik va topologik bog'liqlik nuqtai nazaridan, teoremaning eng go'zal natijalaridan biri uning egri chiziqli uchburchaklar uchun qo'llanilishidir. Masalan, tekislikdagi uchburchakning ichki burchaklari yig'indisi har doim o'zgarmas bo'lsa, egri sirtda bu yig'indi burchaklar farqini keltirib chiqaradi. Gauss-Bonnet teoremasi ushbu farqni aynan shu uchburchak egallagan yuzadagi egrilik integrali bilan bog'laydi. Bu bog'liqlik sirtning teshiklari soni bilan yanada aniqroq namoyon bo'ladi. Sfera kabi teshiksiz sirtlarda to'la egrilik musbat qiymatni saqlasa, tor kabi teshikka ega sirtlarda musbat va manfiy egriliklar bir-birini kompensatsiya qilib, umumiy natijani nolga tenglashtiradi.

Fan va texnikadagi amaliy tatbiqlar borasida Gauss-Bonnet teoremasi shunchaki nazariya emas, balki kuchli hisoblash vositasi bo'lib xizmat qiladi. Raqamli geometriya va uch o'lchamli modellashtirish sohasida kompyuter grafikasi ob'ektlarining egriligini hisoblash, ularni silliqlash va shaklini tanib olish aynan diskret Gauss-Bonnet formulalariga tayanadi. Fizika va kosmologiyada esa fazo-vaqt egriligini o'rganish, kvant gravitatsiyasi va torlar nazariyasidagi harakat funksionallarini tahlil qilishda ushbu geometrik tamoyillar hal qiluvchi o'rin tutadi. Shuningdek, kartografiyada Yer sharining egri sirtini tekis xaritaga tushirishda yuzaga keladigan muqarrar buzilishlarni tushuntirish va hisoblashda ham ushbu teorema qo'llaniladi.

Teoremaning ahamiyati shundaki, u faqat ikki o'lchamli sirtlar bilan cheklanib qolmay, yuqori o'lchamli fazolarga ham umumlashgan. Zamonaviy matematikada ixtiyoriy juft o‘lchamli ko‘pxilliklar uchun yaratilgan Chern-Gauss-Bonnet teoremasi nazariy fizika va global differensial geometriya rivojiga ulkan hissa qo‘shgan. U sirtning egrilik xususiyatlari va topologik sinflari o‘rtasidagi chuqur bog‘liqlikni ko‘rsatib, topologik kvant maydonlar nazariyasining poydevorini mustahkamlagan.

Gauss-Bonnet teoremasi geometriya va topologiyaning naqadar uzviy bog‘liqligini ko‘rsatuvchi, tabiatning fundamental tartibini aks ettiruvchi buyuk matematik kashfiyotdir. Ushbu teorema sirtning lokal egilishlari yig‘indisi uning global tuzilishi, ya’ni topologik xarakteri bilan qat’iy belgilanishini isbotlash orqali matematik tahlilda yangi ufqlar ochib berdi. Xulosa qilib aytganda, teorema geometrik shakllarning ichki mohiyatini tushunishda universal til vazifasini o‘taydi.

Matematik nuqtai nazardan, Gauss-Bonnet teoremasi o‘zgaruvchan miqdorlarning (egrilik) integrali qanday qilib butun va o‘zgarmas miqdorga (topologik invariant) aylanishini ko‘rsatadi. Bu bog‘liqlik sirtning har qanday deformatsiyasida ham o‘z kuchini saqlab qolishi uni fan olamidagi eng barqaror va ishonchli qonuniyatlardan biriga aylantirdi. Sferadan tortib murakkab topologik ko‘pxilliklargacha bo‘lgan barcha ob’ektlar ushbu qat’iy matematik intizomga bo‘ysunadi.

Xulosa qilib aytganda Amaliy jihatdan esa, teoremaning tatbiqlari bugungi kunda nazariy fizikadan tortib yuqori texnologiyali raqamli sanoatgacha kirib borgan. Koinotning umumiy metrikasini o‘rganish, kvant fizikasidagi topologik fazalarni tahlil qilish va kompyuter grafikasida 3D modellarni aniq ishlov berishda ushbu teorema asosiy hisoblash mexanizmi bo‘lib xizmat qilmoqda. Bu esa sof matematik nazariyalarning vaqt o‘tishi bilan qanchalik amaliy ahamiyat kasb etishi mumkinligini yana bir bor tasdiqlaydi. xulosa sifatida shuni aytish mumkinki, Gauss-Bonnet teoremasi shunchaki geometrik formula emas, balki fazo va shakl o‘rtasidagi yashirin uyg‘unlikning matematik ifodasidir. Uning asrlar davomida takomillashib, yuqori o‘lchamli fazolarda ham o‘z aksini topishi zamonaviy ilm-fanning ko‘plab sohalarida yangi kashfiyotlar uchun poydevor bo‘lib qolaveradi.

Ushbu teorema geometriya va topologiya chorrahasidagi tadqiqotlarning eng yorqin va dolzarb namunasi bo‘lib qoladi.

FOYDALANGAN ADABIYOTLAR:

1. Narmanov A.Ya. Differensial geometriya va topologiya elementlari. Toshkent, "Universitet", 2020. (Ushbu darslikda sirtlar nazariyasi, Gauss egriligi va Gauss-Bonnet teoremasining isboti zamonaviy matematik usullarda bayon etilgan).

2. Abduhamidov A.U., Nasritdinov G.N. Differensial geometriya. Toshkent, "O‘qituvchi", 2018. (Klassik sirtlar nazariyasi va egri chiziqlar geometriyasi bo‘yicha fundamental tushunchalar berilgan).

3. Soleyev A., Aralov A.S. Differensial geometriya va topologiya. Samarqand, SamDU nashriyoti, 2021. (Geometrik shakllarning topologik invariantlari va ularning amaliy masalalardagi o‘rniga bag‘ishlangan o‘quv qo‘llanma).

4. Xadjiyev J. Differensial geometriya. Toshkent, Milliy Universitet nashriyoti, 2015. (Sirtlar ustidagi integral hisobi va global geometriya masalalari yoritilgan).