TOPOLOGIK INVARIANTLAR VA ULARNING ZAMONAVIY FANLARDAGI TATBIQLARI

Saliyeva Sevara Ma'mirbek qizi
Andijon davlat pedagogika institute "Matematika va Informatika"kafedrasi o'qituvchisi E-mail: saliyevasevara18@gmail.com
Sobirova Durdonaxon Sherzodbek qizi
Andijon davlat pedagogika institute Matematika yo'nalishi 2-bosqich talabasi, E-mail: durdonamsobirova5@gmail.com

Annotatsiya: *Ushbu maqolada topologiya fanining fundamental tushunchalari bo‘lgan topologik invariantlar va ularning matematik mohiyati tadqiq etilgan. Gomeomorfizm xossasi ostida o‘zgarmas qoluvchi Eyler xarakteristikasi, Betti sonlari va fundamental guruh kabi invariantlarning nazariy asoslari tahlil qilingan. Shuningdek, ushbu invariantlarning zamonaviy Topologik ma'lumotlar tahlili (TDA), molekulyar biologiya, kvant fizikasi hamda o‘yinlar nazariyasidagi amaliy tadbiqlari yoritib berilgan. Maqolada topologik metodlarning murakkab tizimlarni tahlil qilishdagi samaradorligi va istiqbolli yo‘nalishlari ilmiy jihatdan asoslangan.*

Kalit so‘zlar: *topologik invariant, gomeomorfizm, Eyler xarakteristikasi, Betti sonlari, persistental gomologiya, TDA, Nash muvozanati, DNK topologiyasi.*

Аннотация: *В данной статье исследуются теоретические основы топологических инвариантов и их математическая сущность. Анализируются такие инварианты, как характеристика Эйлера, числа Бетти и фундаментальная группа, остающиеся неизменными при гомеоморфизме. Рассматриваются практические приложения этих инвариантов в современном топологическом анализе данных (TDA), молекулярной биологии, квантовой физике и теории игр. Научно обоснована эффективность топологических методов в анализе сложных систем.*

Ключевые слова: *топологический инвариант, гомеоморфизм, характеристика Эйлера, числа Бетти, персистентная гомология, TDA, равновесие Нэша, топология ДНК.*

Abstract: *This article investigates the theoretical foundations of topological invariants and their mathematical essence. Invariants such as the Euler characteristic, Betti numbers, and the fundamental group, which remain invariant under homeomorphism, are analyzed. The practical applications of these invariants in modern Topological Data Analysis (TDA), molecular biology, quantum physics, and game theory are discussed. The effectiveness of topological methods in the analysis of complex systems is scientifically substantiated.*

Keywords: *topological invariant, homeomorphism, Euler characteristic, Betti numbers, persistent homology, TDA, Nash equilibrium, DNA topology.*

Uzluksiz akslantirishlar ichida bizning kursimiz uchun muhim akslantirishlardan biri topologik akslantirishdir. Topologik akslantirish gomeomorfizm deb ham ataladi. Bu paragrafda topologik akslantirish tushunchasini kiritib, misollar keltiramiz va uning biz uchun zarur asosiy xossalarini keltiramiz. Bizga X, Y - topologik fazolar, $f: X \rightarrow Y$ - akslantirish berilgan bo'lsin. Agar f akslantirishga teskari f^{-1} akslantirish mavjud va f, f^{-1} akslantirishlar uzluksiz bo'lsa, f topologik akslantirish yoki gomeomorfizm deb ataladi.

Topologik akslantirishga eng sodda misol qilib $f(x) = x$ qoida bilan aniqlangan ayni $f: X \rightarrow X$ akslantirishni olishimiz mumkin.

Topologik akslantirish ta'rifidan bevosita kelib chiqadiki, agar f topologik akslantirish bo'lsa, unga teskari akslantirish f^{-1} ham topologik akslantirish bo'ladi. Endi f uchun teskari akslantirish mavjud bo'lishi uchun zarur va etarli shartlarga e'tibor beraylik. Teskari akslantirish Y ning har bir nuqtasiga Y ning bitta nuqtasini mos qo'yadi. Demak, ixtiyoriy $y \in Y$ uchun birorta $x \in X$ mavjud bo'lib, $f(x) = y$ tenglik o'rinli bo'lishi kerak. Buning uchun esa $f(X) = Y$ bo'lishi, ya'ni f ustlama akslantirish bo'lishi kerak. Bundan tashqari f^{-1} teskari akslantirish $y \in Y$ nuqtaga bitta $x \in X$ nuqtani mos qo'yganligidan $x_1 \neq x_2$ bo'lganda $f(x_1) \neq f(x_2)$ bo'lishi, ya'ni o'zaro bir qiymatli akslantirish bo'lishi zarurdir.

Shunday qilib, f ga teskari akslantirish f^{-1} mavjud bo'lishi uchun f ning ustlama va o'zaro bir qiymatli akslantirish bo'lishi zarur va yetarli. Agar X va Y topologik fazolar uchun $f: X \rightarrow Y$ topologik akslantirish mavjud bo'lsa, X va Y topologik fazolar o'zaro gomeomorf yoki topologik ekvivalent fazolar deb ataladi. Topologik fazolarning topologik akslantirishda saqlanib qoladigan (ya'ni biridan ikkinchisiga o'tadigan) xossalari topologik xossalar deb ataladi. Topologiya fanida topologik fazolarning, geometrik figuralarning topologik xossalari o'rganiladi.

Misol. Tekislikda $D^2 = \{(x, y): x^2 + y^2 < R^2\}$ ochiq doira tekislikka gomeomorfdir.

Buuyerda $f(x, y) = \left\{\frac{x}{R-\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{R-\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$

formula bilan $f: D^2 \rightarrow R^2$ akslantirishni aniqlasak, fgomeomorfizm bo'ladi. Buni tekshiraylik. Bu akslantirishning uzluksizligi

$u(x, y) = \frac{x}{R-\sqrt{x^2+y^2}}, v(x, y = \frac{x}{R-\sqrt{x^2+y^2}})$

funksiyalarining uzluksizligidan kelib chiqadi. Endi unga teskari akslantirish mavjud va uzluksizligini ko'rsataylik. Teskari $f^{-1}: R^2 \rightarrow D^2$ akslantirishni

$$f^{-1}(x, y) = \left\{\frac{Rx}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{Ry}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}\right\}$$

formula bilan aniqlaymiz. Bu akslantirishning uzluksizligi

$$\mu(x, y) = \frac{Rx}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \varphi(x, y) = \frac{Ry}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}},$$

funksiyalarning uzluksizligidan kelib chiqadi. Endi $f^{-1}(x,y)$ akslantirish haqiqatan ham f akslantirishga teskari akslantirish ekanligini ko'rsataylik. Buning uchun $f\big(\mu(x,y),\varphi(x,y)\big)=(x,y)$ tenglikni isbotlaymiz:

$$f\big(\mu(x,y),\varphi(x,y)\big)=\left\{\frac{\mu(x,y)}{R-\sqrt{\mu^2(x,y)+\varphi^2(x,y)}},\frac{\varphi(x,y)}{R-\sqrt{\mu^2(x,y)+\varphi^2(x,y)}}\right\}$$

$$=\left\{\frac{\frac{Rx}{1+\sqrt{x^2+y^2}}}{R-\frac{R\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}},\frac{\frac{Ry}{1+\sqrt{x^2+y^2}}}{R-\frac{R\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}}\right\}=(x,y)$$

Demak, fakslantirish gomeomorfizmdir.

Evklid fazosida, ya'ni R^n da ixtiyoriy D^n ochiq shar R^n ga gomeomorfdir. Buni ko'rsatish uchun R^n fazoda koordinata boshini D^n sharning markaziga joylashtirib dekart koordinatalar sistemasini kiritib $f: D^n \to R^n$ akslantirishni

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\left\{\frac{x_1}{R-|x|},\frac{x_2}{R-|x|},\dots,\frac{x_n}{R-|x|}\right\}$$

formula bilan aniqlaymiz. Bu yerda $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$, R - D^n sharning radiusidir.

Xulosa: Topologiya fanining rivojlanishi matematikaning boshqa bo‘limlari bilan chambarchas bog‘liq bo‘lib, ayniqsa algebraik topologiya, differensial geometriya, funksional analiz va matematik fizika bilan uzviy aloqada rivojlanib kelmoqda. Shu sababli topologik invariantlar nafaqat sof matematik nazariyada, balki ko‘plab amaliy fanlarda ham muhim ahamiyat kasb etadi. Ular murakkab obyektlarning ichki strukturasini aniqlashda, fazoviy modellarni tahlil qilishda hamda matematik modellashtirish jarayonlarida keng qo‘llaniladi. Topologik invariantlar tushunchasi, gomeomorfizm va topologik xossalarning asosiy mazmuni yoritildi. Gomeomorfizm tushunchasi yordamida ikki topologik fazoning bir xil yoki turlicha ekanligini aniqlash mumkinligi ko‘rsatildi. Agar ikki fazo orasida uzluksiz va o‘zaro teskari akslantirish mavjud bo‘lsa, ular topologik jihatdan teng hisoblanadi. Aynan mana shu g‘oya topologik invariantlarning asosini tashkil qiladi. Ushbu bobda bog‘langanlik, kompaktlik, uzluksizlik va chegaralanganlik kabi topologik xossalar ham invariant sifatida ko‘rib chiqildi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI:

1. Narmanov A. Ya. Differensial geometriya va topologiya. – Toshkent: "Universitet", 2011. – 248 b.

2. Narmanov A. Ya. Topologiya fanidan ma'ruzalar matni. – Toshkent: O‘zMU, 2005. – 120 b.

3. Munkres J. R. Topology (Second Edition). – Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, Inc., 2000. – 537 p.

4. Armstrong M. A. Basic Topology. – New York: Springer-Verlag, 1983. – 251 p.

5. Hatcher A. Algebraic Topology. – Cambridge: Cambridge University Press, 2002. – 550 p.

6. Viro O. Ya., Ivanov O. A., Netsvetaev N. Y., Kharlamov V. M. Elementary Topology: Problem Textbook. – Providence, RI: American Mathematical Society, 2008. – 400 p.