



GEOMETRIK MASALALARNI TURLICHA USULDA YECHISH

Qurbonaliyeva Shoira Maxmanazarovna

SamDCHTI akademik litseyi matematika fani bosh o'qituvchisi

Annotatsiya: Ushbu maqolada geometrik masalalarni turli usullar orqali yechishning ta'limiy ahamiyati, o'quvchilarning mantiqiy va ijodiy fikrlashini rivojlantirishdagi o'rni hamda amaliy tavsiyalar yoritiladi.

KIRISH

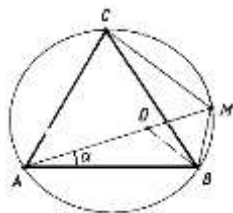
Geometrik masalani bir necha usulda yechish o'quvchilarda moslashuvchan fikrlashni shakllantiradi. Bunday yondashuv formulalarni yodlashdan ko'ra, mazmunni chuqur tushunishga yordam beradi. Buyuk mutafakkirlardan Fridrix Engels: "Yigirmata masalani bitta usulda yechgandan ko'ra, bitta masalani yigirma xil usulda yechgan afzalroq" deb aytgan ekan. Biz ham ushbu maqolamizda geometriyadan ayrim masalalarni bir necha xil usulda yechib ko'rsatmoqchimiz.

Asosiy qism

Masalalarni algebraik, geometrik, grafik, mantiqiy va tahliliy usullar bilan yechish mumkin. Har bir usulning afzalliklari mavjud. Algebraik usul universalligi bilan ajralib tursa, grafik usul masalani ko'rgazmali tushunishga yordam beradi. Geometrik usul fazoviy tasavvurni rivojlantiradi, mantiqiy usul esa isbotlash ko'nikmalarini mustahkamlaydi.

1-masala. Aylanaga ABC muntazam uchburchak ichki chizilgan. BC yoyda ixtiyoriy M nuqta olingan. $MA=MB+MC$ tenglikni isbotlang.

Yechilishi: 1-usul. Masala shartiga mos chizma chizib olamiz.



Chizmadan ko'rinib turibdiki $\angle AMB = 60^\circ$, $\angle BMC = 120^\circ$.

Kosinuslar teoremasidan

Foydalanamiz. Bunda $AB=a$, $MA=x$, $MB=y$, $MC=z$ deb olsak, u holda, $a^2 = x^2 + y^2 - xy$, $a^2 = y^2 + z^2 + xy$ bo'ladi.

1-shakl

Bu tengliklardan $x^2 - z^2 - y(x+z) = 0$ yoki $(x+z)(x-y-z) = 0$ tenglikni hosil qilamiz, bundan $x=y+z$ natijani olamiz.

2-usul. Yuqoridagi chizmadan ko'rinib turibdiki MA, MB va MC kesmalar aylana vatarlari bo'ladi. Bu vatarlarni aylananing R-radiusi va $\angle BAM = \alpha$ burchak orqali ifodalab olamiz. U holda, $x = 2R \sin(60^\circ + \alpha)$, $y = 2R \sin \alpha$, $z = 2R \sin(60^\circ - \alpha)$ bo'ladi. $\sin(60^\circ + \alpha) = \sin \alpha + \sin(60^\circ - \alpha)$ ayniyatga ko'ra yana $x=y+z$ natijani olamiz.

3-usul. ABMC to'rtburchakning yuzini ikkita holatda ifodalaymiz. AM va BC kesmalar kesishgan nuqtani N deb olib, $\angle ANB = \varphi$ belgilash kiritamiz. AMBC to'rtburchakning yuzi $S_{ABCD} = \frac{1}{2} ax \sin \varphi$ ekani bizga ma'lum. Ikkinchi tomondan bu



to'rtburchakning yuzi ABM va ACM uchburchaklar yuzlarining yig'indisiga teng. $\angle ABM = \varphi$, $\angle ACM = 180^\circ - \varphi$ ekanligini ko'rsatish qiyin emas. Shunga ko'ra $S_{ABCD} = \frac{1}{2}ax \sin \varphi = \frac{1}{2}ay \sin \varphi + \frac{1}{2}az \sin (180^\circ - \varphi)$ bo'ladi. Bundan $x=y+z$ natijani olamiz.

4-usul. Yuqoridagi chizmada MA kesma ustida uzunligi MB ga teng bo'lgan MD kesmani olamiz. Bunda $DA=MC$ ekanini ko'rsatish yetarli.

$\angle AMB = 60^\circ$ ekanligidan BDM-muntazam uchburchak bo'ladi. Endi BCM uchburchakni B nuqta atrofida 60° ga buramiz, natijada C nuqta A nuqta bilan, M nuqta esa D nuqta bilan ustma-ust tushadi. Bundan ko'rish mumkinki MC kesma DA kesma bilan ustma-ust tushadi. Demak $DA=MC$ bo'ladi. U holda $MA=MB+MC$ kelib chiqadi.

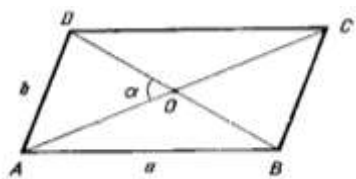
5-usul. Berilgan masalani Ptolemey teoremasi yordamida yechamiz.

Teorema: Doiraga ichki chizilgan to'rtburchak diagonallarining ko'paytmasi to'rtburchak qarama-qarshi tomonlari ko'paytmalarining yig'indisiga teng. $AM \cdot BC = AB \cdot CM + AC \cdot BM$

Shunga ko'ra $x \cdot a = a \cdot y + a \cdot z$ bo'lib, bundan $x=y+z$ natijani olamiz.

2-masala. ABCD parallelogramning diagonallari O nuqtada kesishadi. Agar $AB=a$, $BC=b$ va $\angle AOD = \alpha$ bo'lsa, parallelogram yuzini toping.

Yechilishi:



2-shakl

1-usul. ABCD parallelogramning S yuzasi $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$ formula yordamida hisoblanishi bizga ma'lum. Ko'rinib turibdiki, masalani yechish uchun diagonallar ko'paytmasini topishimiz zarur. Agar $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ deb olsak, $a > b$ bo'ladi.

Yuqoridagi chizmada $AO=x$ va $OB=y$ deb olib, AOB va AOD uchburchaklarga kosinuslar teoremasini qo'llaymiz:

$$a^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha, \quad b^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha. \quad \text{Bundan, } a^2 - b^2 = 4xy \cos \alpha, \quad xy = \frac{a^2 - b^2}{4 \cos \alpha}$$

natijani olamiz. Parallelogramm yuzini xy yordamida $S = 2xy \sin \alpha$ ifodasiga ko'ra, $S = \frac{a^2 - b^2}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$ bo'ladi.

Ko'rsatma: Bunda agar $\alpha = 90^\circ$ bo'lsa, $a=b$ ya'ni rombdan iborat bo'ladi. Biz aniqlagan formulamiz romb uchun o'rinli bo'lmaydi.

2-usul. Ixtiyoriy ABCD to'rtburchaklar uchun $2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{DB} = AB^2 + CD^2 - AD^2 - BC^2$ tenglik o'rinli bo'ladi. Vektorlarning skalyar ko'paytmadan va $AB=CD=a$, $BC=AD=b$ ekanligidan foydalansak: $AC \cdot BD \cdot \cos \alpha = a^2 - b^2$ natijani olamiz. Bundan

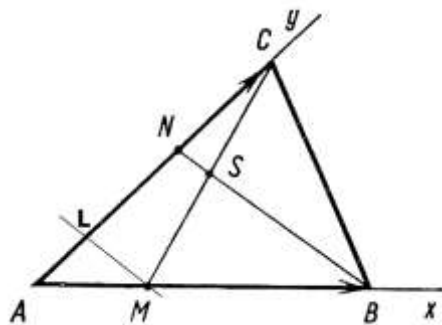
$$S = \frac{a^2 - b^2}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha \text{ kelib chiqadi.}$$



3-usul. $\overline{AB} = \bar{a}$ va $\overline{AD} = \bar{b}$ deb olamiz. U holda $\overline{AC} = \bar{a} + \bar{b}$, $\overline{DB} = \bar{a} - \bar{b}$ bo'ladi. Vektorlarning skalyar ko'paytmasidan $AC \cdot BD \cdot \cos \alpha = a^2 - b^2$ natijani olamiz. Bundan yana $S = \frac{a^2 - b^2}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$ kelib chiqadi.

3-masala. ABC uchburchakning AB va AC tomonlarida mos ravishda M va N nuqtalar shunday olinganki, ular uchun $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{NA} = \frac{1}{2}$ munosabat o'rinli. BN va CM kesmalarning har biri o'zaro kesishadigan S nuqtada qanday nisbatda bo'linadi.

Yechilishi: 1-usul. Dastlab masala shartiga mos chizma chizib olamiz.



3-shakl

CS/SM nisbatni aniqlash uchun M nuqta orqali BN kesmaga parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz, bu chiziq AC tomonni L nuqtada kesib o'tadi.

Fales teoremasiga ko'ra $AM = \frac{1}{2}MB$ ekanligidan $AL = \frac{1}{2}LN$ kelib chiqadi.

Bunga ko'ra $AL + LN = \frac{2}{3}AC$ yoki $\frac{3}{2}LN = \frac{2}{3}AC$ bo'lib, undan $LN = \frac{4}{9}AC$ bo'ladi.

$CN = \frac{1}{3}AC$ ekanidan, $\frac{CN}{LN} = \frac{3}{4}$ bo'ladi. $LM \parallel NS$ ekanligidan $\frac{CS}{SM} = \frac{3}{4}$ kelib chiqadi.

$\triangle CNS \sim \triangle CLM$, $\triangle ALM \sim \triangle ANB$ ekanini e'tiborga olsak, $NS = \frac{3}{7}LM$, $BN = 3LM$ bo'ladi, u

holda $NS = \frac{1}{7}BN$. Demak, $SB = \frac{6}{7}BN$ va $\frac{NS}{SB} = \frac{1}{6}$ natijani olamiz.

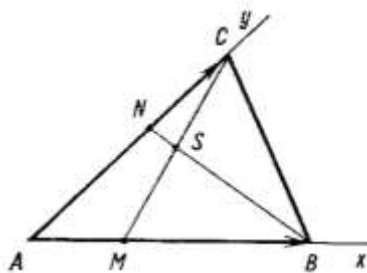
2-usul. Tekislikda A boshlang'ich nuqtali koordinatalar sistemasini va $\overline{AB}$ va $\overline{AC}$ vektorli koordinata o'qlarini kiritamiz. U holda $B(1;0)$, $C(0;1)$ bo'lib, masala shartiga ko'ra $M(\frac{1}{3};0)$, $N(0;\frac{2}{3})$ bo'ladi. CM va BN to'g'ri chiziq tenglamalaridan tenglamalar

sistemi tuzib uni yechsak S nuqtaning koordinatalarini topamiz:
$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x + \frac{3}{2}y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$x = \frac{1}{7}$, $y = \frac{4}{7}$. Demak, $S(\frac{1}{7}; \frac{4}{7})$. Bundan qidirilayotgan nisbatlarni osongina topishimiz mumkin bo'ladi:

$$\frac{CS}{SM} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{7}} = \frac{3}{4}, \quad \frac{NS}{SB} = \frac{\frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{7}} = \frac{1}{6}$$

3-usul. Menelay teoremasidan foydalanamiz.



4-shakl

ACM uchburchak va BN kesuvchi chiziqqa Menelay teoremasini tatbiq etsak:

$$\frac{CS}{SM} \cdot \frac{MB}{BA} \cdot \frac{AN}{NC} = 1 \text{ yoki } \frac{CS}{SM} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = 1 \text{ ekanidan, } \frac{CS}{SM} = \frac{3}{4} \text{ bo'ladi.}$$

Ikkinchi holda ABN uchburchak va CM kesuvchiga Menelay teoremasini qo'llab

$$\frac{NS}{SB} = \frac{1}{6} \text{ natijani olamiz.}$$

Xulosa

Bir masalani turli usullarda yechish o'quvchilarning mantiqiy fikrlashi, mustaqil qaror qabul qilishi va matematik kompetensiyalarini rivojlantiradi. O'qituvchi darslarda imkon qadar bir nechta yechish usullarini taqqoslab berishi maqsadga muvofiq.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Isroilov I., Pashayev Z. Geometriyadan masalalar to'plami. /Akademik litsey va kash-hunar kollejlari uchun o'g'uv qo'llanma. – Toshkent: O'qituvchi. 2010.
2. Isroilov I., Pashayev Z. Geometriya. 1-qism./ Akademik litseylar uchun darslik - Toshkent: "O'qituvchi". 2010.
3. Matematika o'qitish metodikasiga oid ilmiy manbalar.