



UCHBURCHAKNING XOSSALARIDAN FOYDALANIB BA'ZI ALGEBRAIK MASALALARNI YECHISH METODLARI

Qurbonaliyeva Shoir Maxmanazarovna

SamDCHTI akademik litseyi matematika fani bosh o'qituvchisi

Annotatsiya: Ushbu ilmiy maqolada uchburchakning asosiy xossalari yordamida ayrim algebraik masalalarni yechish metodlari tahlil qilinadi. Geometrik yondashuvning afzalliklari, o'quvchilarning mantiqiy fikrlashini rivojlantirishdagi ahamiyati hamda amaliy misollar keltiriladi.

Kalit so'zlar: uchburchak, algebra, geometriya, uchburchak tengsizligi, kosinuslar teoremasi, sinuslar teoremasi, metodika, matematik ta'lim.

KIRISH

Zamonaviy matematika ta'limida fanlararo integratsiya muhim o'rin egallaydi. Algebraik masalalarni geometrik usullar yordamida yechish o'quvchilarning mavzuni chuqur anglashiga, mantiqiy tafakkuri va ijodiy yondashuvini rivojlantirishga xizmat qiladi.

Asosiy qism

Uchburchakning quyidagi xossalari algebraik masalalarni yechishda keng qo'llaniladi:

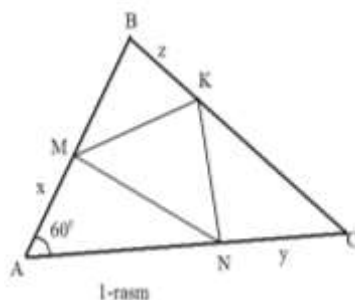
- Uchburchak tengsizligi: $|a-b| < c < a+b$.
- Kosinuslar teoremasi: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.
- Sinuslar teoremasi: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Mazkur xossalardan tengsizliklarni isbotlash, parametrli tenglamalarni geometrik talqin qilish hamda algebraik ifodalarni soddalashtirishda foydalanish mumkin.

Bugun biz ayrim tenglama va tengsizliklarni geometrik shakllarning yuza formulalaridan foydalangan holatda yechib ko'rsatamiz.

1-masala. Ixtiyoriy $x, y, z \in (0;1)$ sonlari uchun $x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) < 1$ tengsizlikni isbotlang.

Yechimi. Tomoni 1 ga teng bo'lgan muntazam ABC uchburchak yasab olib, uning AB, BC, CA tomonlarida M, N, K nuqtalarni shunday joylashtiramizki, $AM=x$, $BK=z$, $CN=y$ bo'lsin (1-rasm).





Hosil bo'lgan AMN, CNK, BMK uchburchaklar yuzalari mos ravishda S_1, S_2, S_3 deb olsak, u holda

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} x(1-y); \quad S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} y(1-z); \quad S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} z(1-x) \text{ bo'ladi.}$$

$$S_1 + S_2 + S_3 < S_{ABC} \text{ va } S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ ekani ma'lum. Ularga asosan}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} x(1-y) + \frac{\sqrt{3}}{4} y(1-z) + \frac{\sqrt{3}}{4} z(1-x) < \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} (x(1-y) + y(1-z) + z(1-x)) < \frac{\sqrt{3}}{4}$$

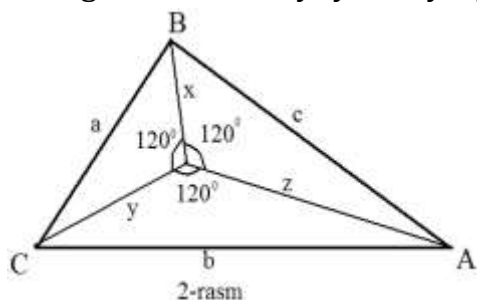
$$x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) < 1$$

kelib chiqadi. Tengsizlik isbotlandi.

2-masala. x, y, z, a, b, c musbat sonlari uchun quyidagi shartlar o'rinli bo'lsa, $xy+yz+zx$ yig'indining qiymatini toping.

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2 \\ y^2 + yz + z^2 = b^2 \\ z^2 + zx + x^2 = c^2 \end{cases}$$

Yechimi. Bu masalani kosinuslar teoremasi yordamida hal qilamiz. Uzunliklari x, y, z ga teng uchta kesmani umumiy O nuqtaga ega va o'zaro 120° li burchak tashkil etadigan qilib joylashtiramiz. Bu kesmalarni ikkinchi uchlarini tutashtirib uzunliklari mos ravishda a, b, c ga teng bo'lgan uchburchak yasab olamiz (2-rasm). Kosinuslar teoremasiga asosan $x^2+xy+y^2=a^2, y^2+yz+z^2=b^2, z^2+zx+x^2=c^2$ tengliklar o'rinli bo'ladi.



Endi hosil bo'lgan AOB, BOC va AOC yuzalarini mos ravishda S_1, S_2, S_3 desak, u holda $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} xy; S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} yz; S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} zx$ bo'ladi.

$$S_1 + S_2 + S_3 = S_{ABC} \text{ ekanligidan } \frac{\sqrt{3}}{4} (xy + yz + zx) = S_{ABC}$$

kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan S_{ABC} - uchburchak yuzini Geron formulasidan foydalanib topamiz: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ formuladan

$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2}}$$



$$\frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + zx) = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

$$\text{va bundan esa } xy + yz + zx = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{3}}$$

ekani kelib chiqadi.

$$\text{Javob: } \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{3}}$$

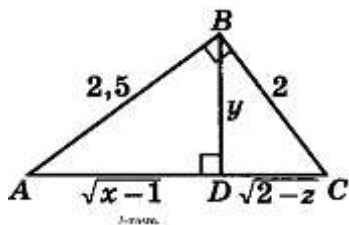
3-masala. Agar $y > 0$, $x + y^2 = 7,25$, $y^2 - z = 2$ va $y^2 = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2-z}$ tengliklar o'rinli bo'lsa, $y \cdot (\sqrt{x-1} + \sqrt{2-z})$ ifodaning qiymatini toping.

Yechimi. Birinchidan, $x \neq 1, z \neq 2$.

Haqiqatdan ham, agarda $x=1$ yoki $z=2$ bo'lsa, $y=0$ bo'ladi. 1 va 0 sonlarining biron-bir juftligi $x + y^2 = 7,25$ shartni qanoatlantirmaydi. Ko'rinib turibdiki, 0 va 2 sonlar juftligi $y^2 - z = 2$ munosabatni qanoatlantirmaydi.

Ikkinchidan, $x > 1$ va $z < 2$ sonlar uchun $x + y^2 = 7,25$ va $y^2 - z = 2$ shartlarni quyidagicha ko'rinishda tasvirlab olamiz: $(\sqrt{x-1})^2 + y^2 = 6,25$ va $y^2 + (\sqrt{2-z})^2 = 4$.

Endi bunga mos chizma chizib olamiz (3-rasm).



Uchinchidan, bu uchburchakning yuzini topish formulasiga ko'ra quyidagi tenglikni yozamiz:

$$S = \frac{1}{2} y \cdot (\sqrt{x-1} + \sqrt{2-z}) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2,5$$

$$y \cdot (\sqrt{x-1} + \sqrt{2-z}) = 5$$

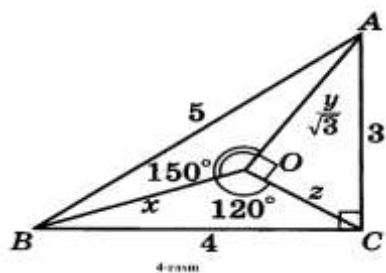
Javob: 5

$$4\text{-masala. } x, y, z \text{ musbat sonlar uchun } \begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25 \\ \frac{y^2}{3} + z^2 = 9 \\ z^2 + zx + x^2 = 16 \end{cases} \text{ tenglamalar}$$

sistemasini yechmasdan turib $xy + 2yz + 3xz$ yig'indining qiymatini hisoblang.

Yechimi.

Masala shartiga mos chizma chizib olamiz (4-rasm).



Chizmadan ko'rinib turibdiki,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}x \cdot \frac{y}{\sqrt{3}} \sin 150^\circ + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{\sqrt{3}}z + \frac{1}{2}xz \sin 120^\circ = \frac{1}{2}x \cdot \frac{y}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{\sqrt{3}}z + \frac{1}{2}xz \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4\sqrt{3}}(xy + 2yz + 3xz)$$

Ikkinchi tomondan ABC to'g'ri burchakli uchburchakning yuzi 6 ga teng.

$$\text{Shunga ko'ra } \frac{1}{4\sqrt{3}}(xy + 2yz + 3xz) = 6 \text{ bo'lib, bundan } (xy + 2yz + 3xz) = 24\sqrt{3}$$

ekanligini aniqlaymiz.

$$\text{Javob: } (xy + 2yz + 3xz) = 24\sqrt{3}$$

Metodik tavsiyalar

- Algebraik masalani geometrik model bilan bog'lash.
- Chizma va dinamik modellar (GeoGebra) dan foydalanish.
- Bir masalani bir nechta usulda yechishni tashkil etish.
- O'quvchilarni mustaqil xulosa chiqarishga yo'naltirish.

Xulosa

Uchburchakning xossalariidan foydalanish algebraik masalalarni sodda, tushunarli va ko'rgazmali yechish imkonini beradi.

Mazkur metod o'quvchilarning matematik tafakkurini rivojlantirish, fanlararo bog'lanishni mustahkamlash hamda ta'lim sifatini oshirishga xizmat qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Algebra. Umumiy o'rta ta'lim maktablari uchun darslik.
2. Geometriya. Umumiy o'rta ta'lim maktablari uchun darslik.
3. Matematika o'qitish metodikasi.
4. GeoGebra dasturidan foydalanish bo'yicha metodik qo'llanmalar.
5. Olimpiada masalalari to'plamlari.