8 – TOM 6 – SON / 2025 - YIL / 15 – IYUN

TO‘RTINCHI TARTIBLI XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN INTEGRAL SHARTLI MASALALAR

Nishonova Shaxnozaxon Toxirjon qizi
Farg‘ona davlat universiteti
Matematik analiz va differensial tenglamalar
kafedrasi dotsenti
shahnozanishonova910@gmail.com
Murodov Sarvarbek Xurshidjon o‘g‘li
Farg‘ona davlat universiteti magistranti
sarvarbekmurodov203@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada to‘rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama uchun integral shartli masalalar o‘rganiladi. Tadqiqotda Koshi va chegara shartlari bilan berilgan masalalar analiz qilinib, ularning yechimining mavjudligi va yagonaligi masalasi isbotlangan.

Kalit so‘zlar: to‘rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama, integral tenglama, integral shart, nolokal masala.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЧАСТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

Нишонова Шахнозахон Тахиржон кизи
Доцент кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений
Ферганский государственный университет
shahnozanishonova910@gmail.com
Муродов Сарварбек Хуршиджон угли
Магистрант Ферганского государственного университета
sarvarbekmurodov203@gmail.com

Аннотация: *В данной статье изучаются задачи с интегральными условиями для частного дифференциального уравнения четвёртого порядка. В исследовании анализируются задачи, заданные с условиями Коши и граничными условиями, и доказывается существование и единственность их решений.*

Ключевые слова: *частное дифференциальное уравнение четвёртого порядка, интегральное уравнение, интегральное условие, нелокальная задача.*

8 – TOM 6 – SON / 2025 - YIL / 15 – IYUN

INTEGRAL CONDITION PROBLEMS FOR FOURTH-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Nishonova Shakhnozakhon Tokhirjon kizi
Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis and Differential Equations
Fergana State University
shahnozanishonova910@gmail.com
Murodov Sarvarbek Xurshidjon ugli
Master's Student at Fergana State University
sarvarbekmurodov203@gmail.com

Annotation: *This article studies integral condition problems for fourth-order partial differential equations. The research analyzes problems given with Cauchy and boundary conditions and proves the existence and uniqueness of their solutions.*

Keywords: *fourth-order partial differential equation, integral equation, integral condition, nonlocal problem.*

Kirish

To'rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar fizika, muhandislik va texnologiyaning turli sohalarida, jumladan, elastiklik nazariyasi, kvant mexanikasi va gidrodinamika kabi fanlarda keng qo'llaniladi. Bunday tenglamalar uchun integral shartli masalalar klassik chegaraviy masalalarga nisbatan murakkabroq bo'lib, ularning yechimining mavjudligi va yagonaligi muhim nazariy va amaliy ahamiyat kasb etadi.

Ushbu maqolada to'rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun integral shartli masalalar o'rganilib, Koshi va chegara shartlari bilan berilgan muammolar tahlil qilinadi. Tadqiqot natijasida bu tenglamalar uchun yechim mavjudligi va yagonaligi isbotlanib, integral shartlarning ta'siri o'rganiladi. Olingan natijalar yuqori tartibli differensial tenglamalar asosida modellashtiriladigan fizik jarayonlarni chuqur tushunishga xizmat qiladi.

Tahlillar va natijalar

Oxy tekisligida $OA: y+x=0, AB: x-y=1, OB: y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan sohani D deb belgilaylik.

D sohada ushbu

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0 \qquad (1)$$

to'rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamani qaraylik, bu yerda $u(x, y)$-noma'lum funksiya. Ko'rsatish qiyin emaski, $x+y=C_1$ va $x-y=C_2$ chiziqlar (1) tenglamaning karrali xarakteristik chiziqlari bo'ladi.

Yuqoridagi tenglama uchun Koshi masalasi [1],[2] ishlarda o'rganilgan. Ammo, bu tenglama uchun nolokal shartli masalalar nisbatan kam o'rganilgan. Shu sababdan, biz ushbu ishda (1) tenglama uchun bir nolokal shartli masalani o'rganamiz.

BS_1 **masala.** (1) tenglamani va

$$u(x,0)+\alpha_1\int_0^x u(\xi,0)d\xi=\beta_1(x), 0\le x\le 1 \quad (2)$$

$$u_y(x,0)=\tau_1(x,0), 0\le x\le 1 \quad (3)$$

$$u_{yy}(x,0)=\tau_2(x,0), \ 0\le x\le 1 \quad (4)$$

$$u_{yyy}(x,0)=\tau_3(x,0), \ 0\le x\le 1 \quad (5)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $C(\overline{D})\cap C^3(D\cup J)\cap C^4(D)$ sinfga tegishli bo'lgan $u(x, y)$ funksiyani topilsin, bu yerda $\beta_1(x),\tau_1(x),\tau_2(x),\tau_3(x)$ -berilgan funksiyalar, $\alpha_1\in R$ hamda $J=\{(x,y):0\le x\le 1, y=0\}$. BS_1 masalani yechish uchun

$$u(x, 0) = \tau_0(x), \ 0 \le x \le 1 \quad (6)$$

belgilash kiritamiz. Natijada (1) tenglama uchun qo'yilgan Koshi masalasi hosil bo'ladi. Ushbu masalaning yechimi

$$u(x, y) = \frac{\tau_0(x+y)+\tau_0(x-y)}{2}-\frac{y}{4}(\tau_0'(x+y)-\tau_0'(x-y))+$$

$$+\tau_1(z)\,dz-\frac{y}{4}(\tau_1(x+y)+\tau_1(x-y))+$$

$$+\frac{y}{4}\int_{x-y}^{x+y}\tau_2(z)dz+\frac{1}{8}\int_{x-y}^{x+y}(y^2-(x-z)^2)\tau_3(z)dz \quad (7)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $\tau_0(x)$ — hozircha noma'lum funksiya.

1-teorema. Agar $\tau_0(x)\in C^4[0,1]\cap C^5(0,1)$, shuningdek, $\tau_1(x),\tau_2(x)$,

$\tau_3(x)\in C^3[0,1]\cap C^4(0,1)$ bo'lsa, u holda BS_1 masalaning yechimi (7) ko'rinishda bo'ladi.

Endi noma'lum funksiya $\tau_0(x)$ ni topib, (7) yechimga qo'ysak, BS_1 masalaning yechimi hosil bo'ladi. (6) belgilashdan foydalanib, (2) shartdan

$$\tau_0(x)+\alpha_1\int_0^x\tau_0(\xi,0)d\xi=\beta_1(x) \quad (8)$$

ko‘rinishidagi integral tenglamani hosil qilamiz. Ushbu tenglamadan $\tau_0(0)=\beta_1(0)$ shartni olishimiz mumkin. Tenglikning ikkala tomonidan hosila olsak, quyidagi oddiy differensial tenglamaga ega bo’lamiz:

$$\tau_0^{'}(x)+\alpha_1\tau_0(x)=\beta_1^{'}(x)$$

Tenglamaning har ikki tomonini $e^{\alpha_1 x}$ ga ko‘paytirib, [0, x] bo‘yicha integrallab, ba’zi sodda hisoblashlarni amalga oshirish orqali $\tau_0(x)$ noma’lum funksiyani ushbu

$$\tau_0(x)=e^{-\alpha_1 x}\left(\int_0^x e^{\alpha_1 s}\beta_1^{'}(s)ds+\tau_0(0)\right)$$

ko‘rinishda topamiz. Bu tenglikning o‘ng tomonidagi integralni bir marta bo‘laklab integrallab, $\tau_0(0)=\beta_1(0)$ ekanligini inobatga olib, yuqorida topilgan ifodani integral tenglamaga qo‘yish natijasida, noma’lum funksiya $\tau_0(x)$ni

$$\tau_0(x)=\beta_1(x)-\int_0^x e^{\alpha_1(s-x)}\beta_1(s)ds \qquad (9)$$

ko‘rinishda ekanligi kelib chiqadi.Topilgan (9) ifodani (7) yechimga qo‘ysak, qaralayotgan masalaning yechimi hosil bo‘ladi.

2-teorema. Agar $\beta_1(x)\in C^4[0,1]\cap \mathrm{C}^5(0,1)$, shuningdek, $\tau_1(x),\tau_2(x)$,

$\tau_3(x)\in C^3[0,1]\cap \mathrm{C}^4(0,1)$ bo‘lsa, u holda BS_1 masalaning yechimi mavjud va yagona.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000.

2. Уринов А.К., Каримов Ш.Т. Операторы Эрдейи – Кобера и их приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных. – Фергана: изд. Фергана, 2021.