

IKKINCHI TARTIBLI ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN INTEGRAL SHARTLI MASALA

Ismoilov Muxtorjon Xamidovich*FarDU, matematik analiz va differensial tenglamalar kafedrası o'qituvchisi;***Sobirova Gulnozaxon Soibjon qizi***FarDU, Matematika**yo'nalishi 3-bosqich talabasi;***Salimova Muxlisaxon Shuxratjon qizi***FarDU, Matematika**yo'nalishi 3-bosqich talabasi;*

Annotatsiya. *Annotatsiya. Ushbu maqolada ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar uchun integral chegaraviy shartli masalalar ko'rib chiqilgan. Tadqiqotda integral shartlar asosida berilgan chegaraviy masalaning yechimini topish usuli tahlil etilgan. Tenglamaning umumiy yechimi topilib, integral chegaraviy shartlar orqali noma'lum konstantalar aniqlandi va yechimning mavjudligi va yagona ekanligi ko'rsatildi. Tadqiq etilgan masalalar orqali integral shartli masalalarni yechishning amaliy jihatlari ochib berilgan.*

Kalit so'zlar: *differensial tenglama, integral shart, chegaraviy masala, nolokal shart, ikkinchi tartib, yechimning mavjudligi, yagona yechim.*

Kirish

Hozirgi kunda differensial tenglamalar nazariyasi matematikaning eng muhim va tez rivojlanayotgan yo'nalishlaridan biri hisoblanadi. U turli tabiiy va texnik jarayonlarni tavsiflashda, jumladan, fizika, mexanika, biologiya va iqtisodiyot sohalarida keng qo'llaniladi. Differensial tenglamalar bilan bog'liq masalalarda yechimni aniqlash uchun odatda boshlang'ich yoki chegaraviy shartlar beriladi. Biroq ayrim hollarda masalaning shartlari integral ko'rinishda ifodalanadi va bunday masalalar integral shartli masalalar deb ataladi.

Integral shartli masalalar klassik shartli masalalardan farqli ravishda, yechimning ma'lum bir oraliqdagi integral xossalarini hisobga oladi. Bu esa real jarayonlarni yanada aniqroq modellashtirish imkonini beradi. Masalan, issiqlik tarqalishi, moddaning diffuziyasi yoki energiya balansiga oid masalalarda integral shartlardan foydalanish muhim ahamiyat kasb etadi.

Asosiy qism

Bizga quyidagi masala berilgan bo'lsin:

Masala. (x_0, x_1) oraliqda

$$(x^\alpha y'(x))' = f(x) \quad (1)$$

tenglamani qanoatlantiradigan va oraliqning chegaralarida esa

$$y(x_0) = \int_{x_0}^{\beta} y(x) dx, \quad y(x_1) = \int_{\beta}^{x_1} y(x_1) dx \quad (2)$$

chegaraviy shartlarni bajaradigan $y(x)$ funksiya topilsin, bu yerda $f(x)$ berilgan ma'lum uzluksiz funksiya x_0, x_1 va $\beta \in (x_0, x_1)$, $\alpha \in (0, 1)$ berilgan haqiqiy sonlar.

Odatda (2) shartlar integral chegaraviy shartlar deb ataladi. Qo'yilgan masala esa integral shartli chegaraviy masala deb ataladi. Integral shartli masalalar ham nolokal shartli masalalar tarkibiga kiradi. Bu masalani yechish uchun (1) tenglamaning umumiy yechimi topilib undagi o'zgarmaslarni topish uchun (2) shartlarga bo'ysundiriladi. (1) tenglama umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda topiladi:

$$y(x) = \int_{x_0}^x \frac{x^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha} f(s) ds + C_1 \frac{x^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C_2, \quad (3)$$

bu yerda C_1 va C_2 - ixtiyoriy o'zgarmaslar.

(3) funksiyaning (2) shartlarga qo'ysak C_1 va C_2 noma'lumlarga nisbatan algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz.

$$\begin{cases} \int_{x_0}^{\beta} \left[\int_{x_0}^x \frac{x^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha} f(s) ds \right] dx + C_1 \int_{x_0}^{\beta} \frac{x^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} dx + C_2 \int_{x_0}^{\beta} dx = C_2, \\ \int_{\beta}^{x_1} y(x) dx = \int_{\beta}^{x_1} \int_{x_0}^x \frac{x^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha} f(s) ds + C_1 \int_{\beta}^{x_1} \frac{x^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} dx + C_2 (x_1 - \beta). \end{cases}$$

Bu tenglamalarda integrallash tartibini almashtirib

$$\begin{cases} C_1 \int_{x_0}^{\beta} \frac{x^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} dx + C_2 (\beta - x_0 - 1) = - \int_{x_0}^{\beta} \frac{\beta^{2-\alpha} - s^{2-\alpha}}{2-\alpha} - s^{1-\alpha} (\beta - s) f(s) ds \\ C_1 \left[\frac{x_1^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \int_{\beta}^{x_1} \frac{x^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} dx \right] + C_2 (1 - x_1 + \beta) = \\ = \int_{x_0}^{\beta} \frac{x_1^{2-\alpha} - \beta^{2-\alpha}}{2-\alpha} - s^{1-\alpha} (x_1 - \beta) f(s) ds + \int_{\beta}^{x_1} \frac{x_1^{2-\alpha} - \beta^{2-\alpha}}{2-\alpha} - s^{1-\alpha} (x_1 - s) f(s) ds - \\ - \int_{x_0}^{x_1} \frac{x_1^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha} f(s) ds \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

Bu sistemaning asosiy determinanti

$$\Delta = (1 - x_1 + \beta) \int_{x_0}^{\beta} \frac{x^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} dx + (1 - \beta + x_0) \left(\frac{x_1^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \int_{\beta}^{x_1} \frac{x^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} dx \right)$$

noldan farqli bo'lgani uchun tenglamalar sistemasidan

$$C_1 = \frac{b_1(1 - x + \beta) - b_2(\beta - x_0 - 1)}{\Delta},$$

$$C_2 = \frac{\int_{x_0}^{\beta} \frac{x^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} dx b_2 - \frac{x_1^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \int_{\beta}^{x_1} \frac{x^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} dx b_1}{\Delta}$$

noma'lumlar bir qiymatli topiladi.

Topilgan C_1 va C_2 larni (3) ga qo'yib o'rganilayotgan masalaning yechimiga ega bo'lamiz.

$$y(x) = \int_{x_0}^x \frac{x^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha} f(s) ds + \frac{b_1(1 - x_1 + \beta) - b_2(\beta - x_0 - 1)}{\Delta} \cdot \frac{x^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{\Delta},$$

bu yerda

$$b_1 = - \int_{x_0}^{\beta} \frac{\frac{\beta^{2-\alpha} - s^{2-\alpha}}{2-\alpha} - s^{1-\alpha}(\beta - s)}{1-\alpha} f(s) ds,$$

$$b_2 = \int_{x_0}^{\beta} \frac{\frac{x_1^{2-\alpha} - \beta^{2-\alpha}}{2-\alpha} - s^{1-\alpha}(x_1 - \beta)}{1-\alpha} f(s) ds + \int_{\beta}^{x_1} \frac{\frac{x_1^{2-\alpha} - \beta^{2-\alpha}}{2-\alpha} - s^{1-\alpha}(x_1 - s)}{1-\alpha} f(s) ds - \int_{x_0}^{x_1} \frac{x_1^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha} f(s) ds,$$

$$a_{11} = \int_{x_0}^{\beta} \frac{x^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} dx, a_{12} = \beta - x_0 - 1, a_{21} = \frac{x_1^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \int_{\beta}^{x_1} \frac{x^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} dx.$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Ўринов А.Қ. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. – Тошкент: "Мумтоз сўз", 2014.
2. ZiyoNet кутубхонаси: library.ziyounet.uz — Ўзбекистондаги ўқув адабиётлари базаси.

3. Google Scholar: scholar.google.com — "Интеграл шартли чегаравий масалалар" бўйича жаҳон илмий мақолалари.
4. CyberLeninka: cyberleninka.ru — Математика ва физика соҳасидаги очик илмий мақолалар базаси.