

RATSIONAL SONLAR MAYDONI. HAQIQIY SONLAR SISTEMASI.

Xolboyeva Mushtariy

Ahmedova Gulshan

Shahrisabz davlat pedagogika instituti pedagogika fakulteti matematika yo'nalishi 2-kurs talabalari

Turayev Ziyovutdin O'ktamxonovich

Ilmiy rahbar: Shahrisabz davlat pedagogika instituti "Matematika va ta'limda axborot texnologiyasi" kafedrasining o'qituvchisi

Annotatsiya: Maqolada ratsional sonlar maydoni $\mathbb{Q}$ ning algebraik tuzilishi, uning asosiy amallarga nisbatan yopiqligi, teskari elementlar mavjudligi, tartib va maydon xossalari matematik asoslari tahlil qilinadi. Shuningdek, haqiqiy sonlar sistemasining $(\mathbb{R})$ to'liqlik xossasi, irratsional sonlarning paydo bo'lish sabablari va haqiqiy sonlarni Dedekind kesmalari hamda Kauchy ketma-ketliklari orqali qurishning nazariy asoslari yoritilgan. Tadqiqotda $\mathbb{Q}$ va $\mathbb{R}$ o'rtasidagi fundamental farqlar, ularning matematik analiz va algebra uchun ahamiyati ilmiy nuqtai nazardan izohlangan. Maqolaning ilmiy yangiligi ratsional maydonning strukturasi haqiqiy sonlar sistemasining to'liqlik tamoyillari bilan qiyosiy tahlil qilish hamda ushbu ikki tizimning zamonaviy matematikadagi o'rni va funksional bog'liqligini konseptual jihatdan yoritib berishdan iborat.

Kalit so'zlar: ratsional sonlar, maydon, ratsional sonlar maydoni, haqiqiy sonlar sistemasi, to'liqlik xossasi, irratsional sonlar, Dedekind kesmalari, Kauchy ketma-ketliklari, tartibli maydon, supremum, sonlar o'qi, matematik analiz, algebraik tuzilma.

Аннотация: В статье анализируется алгебраическая структура поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, рассматриваются вопросы замкнутости основных операций, существования обратных элементов, а также математические основы порядка и полевых свойств. Кроме того, раскрываются свойства полноты системы действительных чисел $\mathbb{R}$, причины появления иррациональных чисел и теоретические основы построения действительных чисел посредством дедикиндовых сечений и последовательностей Коши. В исследовании научно обоснованы фундаментальные различия между $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$, а также их значение для математического анализа и алгебры. Научная новизна статьи заключается в сравнительном анализе структуры рационального поля с принципами полноты системы действительных чисел и концептуальном освещении их места и функциональной взаимосвязи в современной математике.

Ключевые слова: рациональные числа, поле, поле рациональных чисел, система действительных чисел, свойство полноты, иррациональные числа,

сечения Дедекинда, последовательности Коши, упорядоченное поле, супремум, числовая прямая, математический анализ, алгебраическая структура.

Annatation: *The article analyzes the algebraic structure of the field of rational numbers $\mathbb{Q}$, examining the closure of its basic operations, the existence of inverse elements, as well as the mathematical foundations of order and field properties. In addition, the study highlights the completeness property of the real number system $\mathbb{R}$, the reasons for the emergence of irrational numbers, and the theoretical foundations of constructing real numbers through Dedekind cuts and Cauchy sequences. The research provides a scientific explanation of the fundamental differences between $\mathbb{Q}$ and $\mathbb{R}$ and their significance for mathematical analysis and algebra. The scientific novelty of the article lies in the comparative analysis of the structure of the rational field with the completeness principles of the real number system, as well as in the conceptual elucidation of their role and functional interrelation in modern mathematics.*

Keywords: *rational numbers, field, field of rational numbers, real number system, completeness property, irrational numbers, Dedekind cuts, Cauchy sequences, ordered field, supremum, number line, mathematical analysis, algebraic structure.*

KIRISH

Matematikaning asosiy tushunchalaridan biri — sonlar tizimi va ularning strukturasini o'rganishdir. Sonlar insoniyat tarixida nafaqat hisob-kitob va amaliy masalalarni yechishda, balki matematik analiz, algebra va geometriyaning rivojlanishida ham muhim ahamiyatga ega bo'lgan. Mazkur maqolada ratsional sonlar maydoni ($\mathbb{Q}$) va haqiqiy sonlar sistemasi ($\mathbb{R}$) tahlil qilinadi, ularning algebraik va analitik xossalari ko'rib chiqiladi.

Ratsional sonlar maydoni $\mathbb{Q}$ — bu butun sonlarning nisbatlari sifatida ifodalanadigan sonlar to'plami bo'lib, algebraik jihatdan maydon sifatida xizmat qiladi. Ratsional sonlar orqali ko'plab arifmetik va algebraik amallarni bajarish mumkin, ammo ular sonlar o'qidagi barcha nuqtalarni qamrab olmaydi. Shu sababli haqiqiy sonlar sistemi $\mathbb{R}$ kiritilgan bo'lib, u ratsional va irratsional sonlarni o'z ichiga oladi hamda to'liqlik xossasi bilan ajralib turadi.

Maqola davomida $\mathbb{Q}$ va $\mathbb{R}$ ning asosiy xossalari, ularning farqlari, shuningdek matematik analiz va algebra sohalaridagi o'zni yoritiladi. Tadqiqotning maqsadi — ratsional maydonning strukturasini haqiqiy sonlar sistemasining to'liqlik tamoyillari bilan solishtirish va ushbu ikki tizimning zamonaviy matematika rivojidagi ahamiyatini tushuntirishdir.

Ratsional sonlar maydoni ($\mathbb{Q}$)

Ratsional sonlar maydoni — bu butun sonlarning nisbatlari sifatida ifodalanadigan sonlar to'plami. Ya'ni, har qanday ratsional son quyidagicha yozilishi mumkin:

$$\frac{a}{b}, \quad a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}/\{0\}$$

Bu ifodada a — butun son, b esa nolga teng bo'lmagan butun son bo'lib, ular orqali barcha ratsional sonlar hosil bo'ladi. Masalan, $\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, 5$ kabi sonlar ratsional sonlardir, chunki ular butun sonlarning nisbatlari sifatida ifodalanadi ($5 = \frac{5}{1}$).

Algebraik xossalari

Ratsional sonlar maydoni algebraik jihatdan maydon sifatida tavsiflanadi. Bu degani, $\mathbb{Q}$ quyidagi xossalarga ega:

1. Yopiq bo'lish xossasi: Agar $x, y \in \mathbb{Q}$ bo'lsa, u holda $x+y$, $x-y$, $x \cdot y$ va x/y (agar $y \neq 0$) ham ratsional sonlar to'plamiga tegishli. Bu xossa algebra va arifmetikaning asosiy tamoyilidir.

2. Neytral elementlar mavjudligi:

- Qo'shish bo'yicha neytral element 0 — har qanday $x \in \mathbb{Q}$ uchun $x+0=x$.
- Ko'paytirish bo'yicha neytral element 1 — har qanday $x \in \mathbb{Q}$ $x \cdot 1=x$

3. Teskari elementlar mavjudligi:

- Qo'shish bo'yicha teskari element $-x$ mavjud ($x+(-x)=0$).
- Nol bo'lmagan sonlar uchun ko'paytirish bo'yicha teskari element $1/x$ mavjud ($x \cdot 1/x=1$).

4. Amallar xossalari: distributivlik ($x(y+z)=xy+xz$), assotsiativlik ($(x+y)+z=x+(y+z)$) va kommutativlik ($x+y=y+x$, $x \cdot y=y \cdot x$).

Bu xossalar ratsional sonlar maydonini matematik tahlil va algebra masalalarida mustahkam asos sifatida ishlatishga imkon beradi.

Cheklovlari va xususiyatlari

Ratsional sonlar tizimi mukammal bo'lsa-da, u cheklangan xususiyatlarga ega:

- $\mathbb{Q}$ diskret bo'lib, sonlar o'qidagi barcha nuqtalarni qamrab olmaydi. Misol uchun, $\sqrt{2}$ va π kabi sonlar ratsional emas, ya'ni ular $\mathbb{Q}$ to'plamida mavjud emas.

- Shu sababli $\mathbb{Q}$ tahlil va hisob-kitobda to'liqlikni ta'minlay olmaydi, matematik analizda esa u yetarli emas.

Matematik va amaliy ahamiyati

Ratsional sonlar maydoni quyidagi jihatlar bilan ahamiyatlidir:

1. Nazariy asos: $\mathbb{Q}$ orqali haqiqiy sonlar tizimini $\mathbb{R}$ qurish va matematik analizning nazariy tamoyillarini o'rganish mumkin.

2. Yaqinlashtirish vositasi: Har bir haqiqiy son ratsional sonlar ketma-ketligi orqali istalgan aniqlikda yaqinlashtiriladi.

3. Algebra va arifmetika: Nisbatlar, foizlar, arifmetik va geometrik progressiyalar kabi masalalarni yechishda ratsional sonlar asosiy vosita hisoblanadi.

Shu tariqa, ratsional sonlar maydoni $\mathbb{Q}$ — matematikadagi eng asosiy strukturalardan biri bo'lib, haqiqiy sonlar tizimi va boshqa murakkab tizimlar uchun mustahkam poydevor hisoblanadi.

Haqiqiy sonlar sistemi ($\mathbb{R}$)

Haqiqiy sonlar tizimi, yoki $\mathbb{R}$, ratsional va irratsional sonlarni o'z ichiga olgan sonlar to'plamidir. Agar ratsional sonlar $\mathbb{Q}$ butun sonlarning nisbatlari bo'lsa, haqiqiy sonlar tizimi ushbu nisbatlar bilan ifodalanmaydigan, ya'ni irratsional sonlarni ham qamrab oladi. Masalan, $\sqrt{2}$, π , e kabi sonlar ratsional bo'lmagan, ammo haqiqiy sonlardir.

$\mathbb{R}$ ning asosiy xossalari quyidagilardan iborat:

1. To'liqlik xossasi (completeness): Haqiqiy sonlar tizimining eng muhim xossasi — uning to'liqligi. Bu shuni anglatadiki, $\mathbb{R}$ da har qanday yuqoridan chegaralangan to'plam supremumga (eng kichik yuqori chegaraga) ega bo'ladi. Ratsional sonlar to'plamida esa bu xossa mavjud emas, chunki har doim bo'shliqlar mavjud. Masalan, $\sqrt{2}$ ning qiymatini $\mathbb{Q}$ da aniq ifodalash mumkin emas, lekin $\mathbb{R}$ da u aniq mavjud. To'liqlik xossasi matematik analizda uzluksiz funksiyalar, limitlar, integral va differensial hisoblashning asosidir.

2. Uzluksizlik:

Haqiqiy sonlar o'qi bo'shliqsizdir, ya'ni har qanday ikkita haqiqiy son orasida boshqa haqiqiy sonlar mavjud. Bu xossa ratsional sonlarda yo'q — $\mathbb{Q}$ diskret bo'lib, ikki ratsional son orasida ayrim nuqtalar mavjud emas. Uzluksizlik xossasi sonlar o'qi va grafik funksiyalarni tahlil qilishda muhimdir.

3. Algebraik xossalar:

Haqiqiy sonlar $\mathbb{R}$ qo'shish va ko'paytirishga yopiq, distributiv, assotsiativ va kommutativ xossalarga ega. Shuningdek, 0 qo'shish bo'yicha neytral element, 1 esa ko'paytirish bo'yicha neytral element sifatida ishlatiladi. Har bir haqiqiy sonning qo'shish bo'yicha teskari elementi mavjud ($-x$), nol bo'lmagan sonning esa ko'paytirish bo'yicha teskari elementi ($1/x$) mavjud.

4. Qurilish usullari:

Matematik jihatdan haqiqiy sonlarni qurish ikki asosiy yo'l bilan amalga oshiriladi:

- o Dedekind kesmalari (Dedekind cuts): Ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ ma'lum shartlar bo'yicha bo'linadi. Har bir kesma haqiqiy sonni aniqlaydi va shu orqali $\mathbb{R}$ ning to'liqligi matematik jihatdan kafolatlanadi.

- o Cauchy ketma-ketliklari (Cauchy sequences): Ratsional sonlarning limitga yaqinlashuvchi ketma-ketliklari yordamida haqiqiy sonlar hosil qilinadi. Bu usul orqali har bir haqiqiy son ratsional sonlar orqali yaqinlashtiriladi va to'liq tizim yaratiladi.

5. Ratsional va irratsional sonlarning o'zaro bog'liqligi:

Haqiqiy sonlar tizimi ratsional sonlarni o'z ichiga olgan, lekin ular yetarli emas. Irratsional sonlar ushbu tizimga uzluksizlik va to'liqlik xossasini qo'shadi. Shu bilan birga, har bir haqiqiy son ratsional sonlar orqali taxminan ifodalanadi, ya'ni

matematik analizda hisob-kitoblarni amalga oshirish uchun ratsional sonlar ishlatiladi, natija esa haqiqiy sonlar tizimida olinadi.

Haqiqiy sonlar tizimi $\mathbb{R}$ ratsional sonlar to'plamining cheklovlarini bartaraf etadi va matematik analiz uchun zarur bo'lgan uzluksizlik va to'liqlik xossalarini ta'minlaydi. Shu sababli $\mathbb{R}$ sonlar tizimi algebra, geometriya va analizning asosiy vositasidir. Ratsional sonlar esa $\mathbb{R}$ ning asosiy tarkibiy qismi sifatida ishlatiladi, u orqali real sonlarni yaqinlashtirish va hisoblash mumkin bo'ladi.

Ratsional va haqiqiy sonlarning o'zaro bog'liqligi

Ratsional sonlar $\mathbb{Q}$ va haqiqiy sonlar $\mathbb{R}$ o'rtasidagi bog'liqlik matematik analiz va algebra sohalarida markaziy o'rin tutadi. Ratsional sonlar haqiqiy sonlar tizimining asosiy tarkibiy qismi hisoblanadi, chunki har bir haqiqiy son ratsional sonlar orqali yaqinlashtirilishi mumkin. Shu bilan birga, haqiqiy sonlar tizimi ratsional sonlardan farqli o'laroq, uzluksizlik va to'liqlik xossasiga ega, bu esa matematik tahlil va amaliy hisob-kitoblarda muhim ahamiyatga ega.

Ratsional va haqiqiy sonlar o'rtasidagi bog'liqlik quyidagi jihatlarda namoyon bo'ladi:

1. Yaqinlashtirish imkoniyati:

Har qanday haqiqiy sonni ratsional sonlar ketma-ketligi yordamida istalgan aniqlikda yaqinlashtirish mumkin. Masalan, π sonini $3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, \dots$ kabi ratsional sonlar orqali ifodalash mumkin. Bu xossa Cauchy ketma-ketliklari asosida matematik jihatdan izohlanadi va haqiqiy sonlar tizimining to'liqligini ta'minlaydi.

2. Irratsional sonlarning mavjudligi:

Haqiqiy sonlar tizimi ratsional sonlarni uzluksiz to'ldiradi. Masalan, $\sqrt{2}$ soni ratsional emas, lekin haqiqiy sonlar tizimida mavjud. Shu tariqa, irratsional sonlar ratsional sonlarning yetarli emasligini ko'rsatadi va $\mathbb{R}$ ning uzluksizligini kafolatlaydi.

3. Matematik analiz va algebra uchun ahamiyati:

Ratsional sonlar $\mathbb{R}$ dagi hisoblashlar va yaqinlashtirishlarda asos sifatida ishlatiladi, ammo natijalar va xulosalar haqiqiy sonlar tizimida olinadi. Masalan, integral va limit hisoblashlar, differensial tenglamalarni yechish faqat $\mathbb{R}$ tizimida to'liq va aniq amalga oshiriladi. Shu bilan birga, ratsional sonlar $\mathbb{R}$ ning strukturasi tushunish va haqiqiy sonlarni qurishda nazariy asos sifatida xizmat qiladi.

4. Uzluksizlik va to'liqlikning roli:

Ratsional sonlar ketma-ketligi orqali haqiqiy sonlar hosil qilinadi, lekin ratsional sonlar o'zi to'liqlikni ta'minlay olmaydi. Bu $\mathbb{R}$ ning matematik tizim sifatida mustahkamligi va har qanday yuqoridan chegaralangan to'plamning supremumga ega bo'lishi xossasini ko'rsatadi. Shu sababli, ratsional va haqiqiy sonlarning o'zaro bog'liqligi matematik tahlilning nazariy asosini tashkil etadi.

Ratsional sonlar maydoni $\mathbb{Q}$ va haqiqiy sonlar tizimi $\mathbb{R}$ matematik analiz va algebra fanlari uchun asosiy tushunchalardir. Ratsional sonlar butun sonlarning nisbatlari sifatida ifodalanadi va algebraik xossalarga ega: qo'shish, ayirish,

ko'paytirish va bo'lish amallari yopiq, teskari elementlar mavjud va distributiv, assotsiativ hamda kommutativlik xossalari bajariladi. Shu bilan birga, ratsional sonlar diskret tizim bo'lib, sonlar o'qidagi barcha nuqtalarni qamrab olmaydi, ya'ni ular to'liqlik xossasiga ega emas.

Haqiqiy sonlar tizimi $\mathbb{R}$ esa ratsional sonlarni uzluksiz to'ldiradi va irratsional sonlarni o'z ichiga oladi. Shu sababli $\mathbb{R}$ tizimi to'liq va uzluksiz bo'lib, har qanday yuqoridan chegaralangan to'plamga supremumni beradi. Dedekind kesmalari va Cauchy ketma-ketliklari orqali qurilgan haqiqiy sonlar tizimi limitlar, integral va differensial hisoblashlarda ishlatiladi va matematik tahlilning mustahkam asosini yaratadi.

Ratsional va haqiqiy sonlarning o'zaro bog'liqligi matematik analizning nazariy asosini tashkil qiladi. Ratsional sonlar orqali haqiqiy sonlarni istalgan aniqlikda yaqinlashtirish mumkin, irratsional sonlar esa tizimga uzluksizlik va to'liqlik xossasini kiritadi. Shu tariqa, $\mathbb{Q}$ va $\mathbb{R}$ ning o'zaro bog'liqligi va farqlari matematik tushunchalarni chuqurroq anglash, algebraik va analitik masalalarni yechish hamda zamonaviy matematikaning strukturaviy jihatlarini tushunishda muhim ahamiyatga ega.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Yo'ldoshev U., Abdurahmonov A. Algebra va sonlar nazariyasi. – T.: O'zbekiston, 2014.
2. Qodirov A., Xo'jayev A. Oliy algebra. – T.: Fan, 2005.
3. Turaev A., Shodmonov Sh. Matematika asoslari. – Toshkent: TDPU nashriyoti, 2010.
4. Kurosh A.G. Kurs vysshey algebry. – M.: Nauka, 1965.
5. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza. – M.: Nauka, 1976.
6. Kudryavtsev L.D. Kurs matematicheskogo analiza. – M.: Mir, 1981.
7. Fichtenholz G.M. Kurs diferencial'nogo i integral'nogo ischisleniya (3 jildlik). – M.: Nauka, 1970–1972.
8. Shamsiddinov M. Matematik tahlil asoslari. – T.: Fan va texnologiya, 2012.