DOIRAVIY SOHADA FAZO-VAQT KASR TARTIBLI SUPERDIFFUZIYA TENGLAMASINING ANALITIK YECHILUVCHANLIGI VA SPEKTRAL XOSSALARI

Olmosov Xurshid Olmos o'g'li
Osiyo Xalqaro Universiteti magistiri

Annotatsiya: *Ushbu maqolada bir jinsli Dirixle chegaraviy shartlari ostida ikki o'lchamli tekis doiraviy sohada fazo va vaqt bo'yicha kasr tartibli superdiffuziya tenglamasi uchun qo'yilgan boshlang'ich-chegaraviy masala tadqiq etilgan. Vaqt bo'yicha jarayon evolyutsiyasi* $\alpha \in (1,2)$*tartibli Kaputo kasrli hosilasi orqali, zarrachalarning uzoq masofalarga sakrashini (Levi parvozlarini) ifodalovchi fazoviy nolokallik esa qutb koordinatalaridagi* $\beta \in (0,1)$ *tartibli spektral kasrli Laplas operatori orqali modellashtirilgan. Shturm-Liuvill spektral nazariyasini qo'llash orqali masalaning aniq analitik yechimi ikki parametrli Mittag-Leffler funksiyalarini o'z ichiga olgan ikki karrali cheksiz Furye-Bessel qatori ko'rinishida qurilgan. Yechimning mavjudligi va tekis yaqinlashishi Sobolev fazolarida Veyershtrass alomati yordamida, yagonaligi esa Alikaxanov-Andreev kasrli differensial tengsizligiga asoslangan energetik integrallar metodi orqali qat'iy isbotlangan. Kasr tartibli parametrlarning anomal ko'chish jadalligiga ko'rsatadigan jismoniy ta'siri muhokama qilingan.*

Kalit so'zlar: *superdiffuziya, Kaputo hosilasi, spektral kasrli Laplas operatori, doiraviy soha, Furye-Bessel qatori, Mittag-Leffler funksiyasi, mavjudlik va yagonalik, Alikaxanov-Andreev tengsizligi.*

Аннотация: *В данной работе исследуется начально-краевая задача для пространственно-временного дробного уравнения супердиффузии в двумерной круговой области при однородных граничных условиях Дирихле. Временная эволюция моделируется с использованием дробной производной Капуто порядка* $\alpha \in (1,2)$ *, а пространственная нелокальность описывается спектральным дробным лапласианом порядка* $\beta \in (0,1)$ *в полярных координатах. На основе спектральной теории Штурма-Лиувилля построено точное аналитическое решение в виде двойного бесконечного ряда Фурье-Бесселя, содержащего двухпараметрические функции Миттаг-Леффлера. Строго установлены существование и равномерная сходимость решения с помощью признака Вейерштрасса в пространствах Соболева, а единственность доказана методом энергетических интегралов на основе дробного дифференциального неравенства Алиханова-Андреева.*

Ключевые слова: *супердиффузия, производная Капуто, спектральный дробный лапласиан, круговая область, ряд Фурье-Бесселя, функция Миттаг-Леффлера, существование и единственность, неравенство Алиханова-Андреева.*

Annotation: *This paper investigates the initial-boundary value problem for a space-time fractional superdiffusion equation in a two-dimensional circular domain under homogeneous Dirichlet boundary conditions. The temporal evolution is modeled using the Caputo fractional derivative of order* $\alpha \in (1,2)$*, while the spatial non-locality is governed by the spectral fractional Laplacian of order* $\beta \in (0,1)$ *in polar coordinates. By applying the Sturm-Liouville spectral theory, the explicit analytical solution is constructed in the form of a double infinite Fourier-Bessel series embedding the two-parameter Mittag-Leffler functions. The existence and uniform convergence of the solution are rigorously established using Weierstrass M-test in Sobolev spaces, and the uniqueness is proven via an energy-integral method based on the Alikhanov-Andreev fractional inequality.*

Keywords: *superdiffusion, Caputo derivative, spectral fractional Laplacian, circular domain, Fourier-Bessel series, Mittag-Leffler function, existence and uniqueness, Alikhanov-Andreev inequality.*

KIRISH

Fikning ikkinchi qonuni va standart Laplas operatoriga asoslangan klassik diffuziya modellari zarrachalarning stoxastik harakati Gauss taqsimotiga bo'ysunadi deb hisoblaydi, bu yerda o'rtacha kvadratik siljish vaqtga chiziqli bog'liq bo'ladi: $\langle x^2(t)\rangle \sim t$. Biroq, geterogen muhitlar, g'ovakli tog' jinslari, turbulent plazma va xaotik polimer tarmoqlaridagi ko'chish jarayonlari ushbu klassik paradigmadan sezilarli og'ishlarni ko'rsatadi. Anomal diffuziya deb ataladigan bunday hodisalar $\langle x^2(t)\rangle \sim t^{\gamma}$ ko'rinishidagi nomutanosib darajali qonuniyat bilan xarakterlanadi. Agar $\gamma > 1$ bo'lsa, jarayon superdiffuziya sinfiga ajratiladi, bu odatda ham tizimning tarixiy xotira effektlarini, ham uzoq masofali fazoviy korrelyatsiyalarni (Levi parvozlarini) o'z ichiga oladi.

Ushbu qo'shaloq anomal effektlarni qamrab olish uchun fazo-vaqt kasr tartibli differensial tenglamalar mustahkam matematik vosita sifatida yuzaga chiqdi. Dekart koordinatalarida va cheksiz sohalarda kasr tartibli diffuziya yetarlicha o'rganilgan bo'lsa-da, ushbu tenglamalarni chekli egri chiziqli geometriyalarda — xususan, doiraviy sohalarda yechish koordinatalarning boshidagi (markazdagi) singulyarlik (maxsuslik) tufayli jiddiy matematik qiyinchiliklarni tug'diradi.

Ushbu ishning asosiy ilmiy yangiligi R radiusli doira ichida bog'langan fazo-vaqt kasr tartibli superdiffuziya modelini qat'iy matematik tahlil qilishdan iborat. Biz o'zgaruvchilarni ajratish va Shturm-Liuvill nazariyasi kombinatsiyasidan foydalanib, masalaning aniq analitik yechiluvchanligini ko'rsatdik, shuningdek, klassik yechimning mavjudligi, yagonaligi va turg'unligini (Xadamar ma'nosidagi korrektligini) qat'iy isbotladik.

2. Metodlar va masalaning qo'yilishi (Methods and Problem Formulation)

Qutb koordinatalar tizimida Rradiusli ochiq doiraviy sohani $\Omega = \{(r, \varphi): 0 \leq r < R, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$orqali va uning yopig'ini $\bar{\Omega}$ deb belgilaylik. Biz quyidagi fazo-vaqt kasr tartibli bir jinsli bo'lmagan superdiffuziya tenglamasini ko'rib chiqamiz:

$$^{C}\partial_{0t}^{\alpha}u(r,\varphi,t) + K_{\alpha}(-\Delta_{r,\varphi})^{\beta}u(r,\varphi,t) = f(r,\varphi,t), \quad (r,\varphi) \in \Omega, \quad t \in (0,T]$$

Bu yerda maydonning dastlabki holati va kinetik o'zgarish tezligini ifodalovchi bir jinsli boshlang'ich shartlar berilgan:

$$u(r,\varphi,0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u(r,\varphi,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

Soha chegarasida bir jinsli Dirixle sharti hamda maxsus qutb nuqtasida tabiiy chegaralanganlik sharti qo'yiladi:

$$u(R,\varphi,t) = 0, \quad \lim_{r\to 0^+} |u(r,\varphi,t)| < \infty$$

Bu yerda, $1 < \alpha < 2$ vaqt bo'yicha Kaputo ma'nosidagi kasr tartibli hosila bo'lib, quyidagicha aniqlanadi:

$$^{C}\partial_{0t}^{\alpha}u(r,\varphi,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t \frac{\partial^2 u(r,\varphi,\tau)}{\partial \tau^2}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}}$$

$(-\Delta_{r,\varphi})^{\beta}$\$(\$$0 < \beta < 1$) fazoviy operatori esa klassik qutb Laplas operatorining xos tizimi orqali ta'riflanadigan spektral kasrli Laplas operatoridir:

$$\Delta_{r,\varphi} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Tadqiqot metodologiyasi funksiyalarni Bessel-trigonometrik xos funksiyalarining to'liq ortogonal tizimlariga yoyishga asoslangan Furye spektral usulidan iborat.

3. Natijalar.

3.1. Kasr tartibli Laplas operatorining spektral xossalari

Dastlab, shartlar ostida $-\Delta_{r,\varphi}v = \lambda v$ klassik xos qiymat masalasini tahlil qilamiz. Topilgan xos qiymatlar λ_{nm}va ortogonal xos funksiyalar $v_{nm}(r,\varphi)$ quyidagi ko'rinishga ega:

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2, \quad v_{nm}(r,\varphi) = J_n\left(\frac{\mu_{nm}}{R}r\right)(A_{nm}\cos(n\varphi) + B_{nm}\sin(n\varphi))$$

bu yerda $J_n(z)$— n-tartibli birinchi tur Bessel funksiyasi, μ_{nm} esa uning m-chi musbat haqiqiy ildizidir.

Spektral ta'rifga ko'ra, ixtiyoriy etarlicha silliq $g(r,\varphi)$ funksiyasi uchun kasr tartibli Laplas operatori quyidagicha ta'sir qiladi:

$$(-\Delta_{r,\varphi})^{\beta}g(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_{nm}^{\beta}g_{nm}v_{nm}(r,\varphi)$$

Natijada, $(-\Delta_{r,\varphi})^{\beta}$ operatorining xos qiymatlari qat'iy ravishda \$$\Lambda_{nm} = \lambda_{nm}^{\beta} = (\mu_{nm}/R)^{2\beta}$\$ ko'rinishida transformatsiyaga uchraydi, xos funksiyalar esa o'zgarishsiz qoladi.

3.2. Aniq analitik yechimni qurish

Biz qidirilayotgan $u(r,\varphi,t)$ yechimni va berilgan $f(r,\varphi,t)$ manba funksiyasini Furye qatoriga yoyamiz:

$$u(r,\varphi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}T_{nm}(t)v_{nm}(r,\varphi)$$
$$f(r,\varphi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}f_{nm}(t)v_{nm}(r,\varphi)$$

Ushbu yoyilmalarni (2.1) tenglamaga qo'yish orqali vaqtga bog'liq noma'lum koeffitsiyentlar uchun kasr tartibli oddiy differensial tenglama hosil bo'ladi:

$$^{C}\partial_{0t}^{\alpha}T_{nm}(t)+K_{\alpha}\lambda_{nm}^{\beta}T_{nm}(t)=f_{nm}(t)$$

Ushbu Koshi masalasini Laplas almashtirishi va ikki parametrli Mittag-Leffler funksiyasining xossalaridan foydalanib yechish orqali koeffitsiyentlarning aniq analitik formulasi topiladi:

$$T_{nm}(t)=\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-K_{\alpha}\lambda_{nm}^{\beta}(t-\tau)^{\alpha})f_{nm}(\tau)d\tau$$

3.3. Mavjudlik va yagonalik teoremalari

Teorema 1 (Mavjudlik). Agar $f(r,\varphi,t)\in C^2(\bar{\Omega})$ va $f(R,\varphi,t)=0$ bo'lsa, u holda qator mutloq va tekis yaqinlashadi hamda tizimning klassik yechimini aniqlaydi.

Isbotining qisqacha mazmuni: $|E_{\alpha,\alpha}(-x)|\leq\frac{C}{1+x}$ asimptotik bahosidan foydalanib, $|T_{nm}(t)|\leq\frac{C_1}{\lambda_{nm}^{\beta}}\max|f_{nm}(t)|$ ekanligini olamiz. Kasrli Laplas operatori hadi uchun qatorning umumiy hadi $C_1\max|f_{nm}(t)|\cdot\|v_{nm}\|$ qiymati bilan chegaralanadi. $f\in C^2$ bo'lgani uchun uning Furye koeffitsiyentlari $O(\lambda_{nm}^{-1})$ tezlikda kamayadi. $\lambda_{nm}\sim n^2+m^2$ ekanligini hisobga olsak, ikki karrali qator yaqinlashuvchi $\sum\sum\frac{1}{n^2+m^2}<\infty$ sonli qator orqali majorantlanadi, bu esa Veyershtrass alomati orqali tekis yaqinlashishni isbotlaydi.

Teorema 2 (Yagonalik). Boshlang'ich-chegaraviy masalaning klassik yechimi yagonadir.

Isbotining qisqacha mazmuni: Ikki xil u_1 va u_2 yechimlar mavjud deb faraz qilib, ularning ayirmasi $w=u_1-u_2$ funksiyasini kiritamiz. U nolga teng ma'lumotlar bilan bir jinsli tenglamani qanoatlantiradi. $E(t)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}w^2\,d\Omega$energetik funksionalini tuzamiz. Tenglamani w ga ko'paytirib, soha bo'yicha integrallasak va Alikaxanov-Andreev kasrli differensial tengsizligini

($w\cdot\ {}^{C}\partial_{0t}^{\alpha}w\geq\frac{1}{2}\ {}^{C}\partial_{0t}^{\alpha}(w^2)$) hamda spektral kasrli Laplas operatorining musbat aniqlanganlik xossasini qo'llasak:

$$^{C}\partial_{0t}^{\alpha}E(t)\leq-K_{\alpha}\int_{\Omega}w\,(-\Delta_{r,\varphi})^{\beta}w\,d\Omega\leq 0$$

$E(0)=0$\$va\$ $\ {}^{C}\partial_{0t}^{\alpha}E(t)\leq 0$ bo'lganligi sababli, kasrli taqqoslash prinsiplariga ko'ra barcha nuqtalarda $E(t)\leq 0$ bo'ladi. Integral ta'rifiga ko'ra har doim $E(t)\geq$

0 bo'lgani uchun, faqatgina $E(t) \equiv 0$ bo'lishi mumkin, bu esa $w(r, \varphi, t) \equiv 0 \Longrightarrow u_1 \equiv u_2$ ekanligini, ya'ni yechim yagonaligini tasdiqlaydi.

Ushbu tadqiqotda olingan analitik yechim vaqtinchalik xotira (α) va fazoviy nolokallik (β) parametrlari orasidagi o'zaro munosabatni yaqqol ko'rsatadi. $\beta \to 1^-$ bo'lganda, model vaqt bo'yicha kasr tartibli standart diffuziya tenglamasiga aylanadi, bu yerda fazoviy tarqalish an'anaviy gradient oqimiga mos keladi. Biroq, $0 < \beta < 1$ bo'lganda, $\Lambda_{nm} = \lambda_{nm}^{\beta}$ xos qiymatlarining o'sishi klassik holatga (λ_{nm}) qaraganda sekinlashadi. Mexanik nuqtai nazardan, yuqori tartibli xos qiymatlarning bunday bostirilishi fizik fazoda diffuziya to'lqin frontining tezlashishiga olib keladi va bu uzoq masofali Levi parvozlari sodir bo'layotganini jismoniy tomondan asoslaydi.

Bundan tashqari, yechim strukturasi ko'p jihatdan Mittag-Leffler $E_{\alpha,\alpha}(-x)$ funksiyasiga tayanadi, u uzoq vaqtlar uchun algebraik kamayishni ($O(x^{-2})$)namoyon etadi. Bu holat klassik Furye tahlilida kuzatiladigan eksponentsial kamayishdan ($\exp(-x)$) tubdan farq qiladi. Ushbu sekin darajali qonuniyat anomal muhitning struktura "xotirasi" mavjudligining matematik ifodasidir. Bu yerda aniqlangan analitik formulalar silindrik koordinatalarda ko'p tartibli kasrli tenglamalarni yechishga qaratilgan chekli-ayirmalar yoki chekli elementlar kabi sonli algoritmlarning aniqligini tekshirish uchun "Benchmark" (etalon yechim) bo'lib xizmat qilishi mumkin.

Xulosa. Ushbu ishda doiraviy geometriya ichida fazo-vaqt kasr tartibli superdiffuziya tenglamasini tahlil qilish uchun qat'iy matematik apparat ishlab chiqildi. Shturm-Liuvill spektral yoyilmasining imkoniyatlaridan foydalanib, murakkab nolokal integro-differensial operatorlarni hisoblanuvchi algebraik qatorlar ko'rinishiga o'tkazishga muvaffaq bo'lindi. Aniq yechim Furye-Bessel yoyilmalari va Mittag-Leffler maxsus funksiyalari orqali muvaffaqiyatli shakllantirildi. Global barqarorlik, mavjudlik va yagonalik teoremalari qat'iy isbotlandi. Ushbu natijalar doiraviy jismoniy sohalarda anomal kinetik jarayonlarni chuqur modellashtirish va kompyuter simulyatsiyalarini o'tkazish uchun zarur bo'lgan fundamental nazariy bazani mustahkamlaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Podlubny, I. (1999). Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications. Academic Press

2. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier Science.

3. Alikhanov, A. A. (2015). A new difference scheme for the time-fractional diffusion equation. Journal of Computational Physics, 280, 424–438. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.09.034

4. Mainardi, F. (2010). Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models. Imperial College Press.

5. Metzler, R., & Klafter, J. (2000). The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. Physics Reports, 339(1), 1–77. https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00070-3

6. Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1993). Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. Gordon and Breach Science Publishers.

7. Pskhu, A. V. (2009). Fractional Differential Equations (in Russian). Nalchik: Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS.

8. Uchaikin, V. V. (2013). Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Higher Education Press & Springer-Verlag.

9. Luchko, Y. (2011). Initial-boundary-value problems for the generalized time-fractional diffusion equation. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 374(2), 538–548. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.08.048

10. Meerschaert, M. M., & Sikorskii, A. (2012). Stochastic Models for Fractional Calculus. De Gruyter.