

MATEMATIKA VA FIZIKA UCHRASHGANDA: HOSILA, TEZLIK VA TEZLANISH

Abdulloyeva Dilsora Abdumalikovna

*Navoiy shahar Politexnikumi matematika fani o'qituvchisi
abdulloyevadilsora@gmail.com*

Xo'jayeva Dilnoza Komiljonovna

*Navoiy shahar Politexnikumi fizika fani o'qituvchisi
dilnozaxujayeva87@gmail.com*

Annotatsiya: *Ushbu maqolada differensial hisobning fundamental tushunchasi bo'lgan funksiya hosilasining fizik-mexanik mohiyati tadqiq etiladi. Tadqiqot davomida ta'lim tizimidagi mavhum matematik amallar va real kinematik jarayonlar o'rtasidagi uzilish muammosi tahlil qilingan. Moddiy nuqtaning nohiziqli harakat trayektoriyasini modellashtirish orqali birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarning oniy tezlik hamda tezlanish koordinatalari bilan uzviy bog'liqligi deterministik usullar yordamida asoslangan. Olingan natijalar fundamental fanlar integratsiyasini ta'minlash va o'rganuvchilarning ilmiy dunyoqarashini tizimli shakllantirishda muhim metodologik ahamiyatga ega.*

Kalit so'zlar: *hosila, oniy tezlik, tezlanish, differensial hisob, kinematik zanjir, fanlararo integratsiya, matematik model.*

Аннотация: *В данной статье исследуется физико-механическая сущность производной функции, являющейся фундаментальным понятием дифференциального исчисления. В ходе исследования проанализирована проблема разрыва между абстрактными математическими операциями и реальными кинематическими процессами в образовательной системе. Путем моделирования траектории нелинейного движения материальной точки с помощью детерминированных методов обоснована неразрывная связь производных первого и второго порядка с координатами мгновенной скорости и ускорения. Полученные результаты имеют важное методологическое значение для обеспечения интеграции фундаментальных наук и системного формирования научного мировоззрения учащихся.*

Ключевые слова: *производная, мгновенная скорость, ускорение, дифференциальное исчисление, кинематическая цепь, межпредметная интеграция, математическая модель.*

Abstract: *This article investigates the physical and mechanical essence of the function derivative, which is a fundamental concept of differential calculus. The study analyzes the gap between abstract mathematical operations and real kinematic processes in the educational system. By modeling the trajectory of non-linear motion of a material point, the inextricable connection of first and second-order derivatives with the coordinates*

of instantaneous velocity and acceleration is substantiated using deterministic methods. The obtained results are of high methodological importance for ensuring the integration of fundamental sciences and the systematic formation of the scientific worldview of learners.

Keywords: *derivative, instantaneous velocity, acceleration, differential calculus, kinematic chain, interdisciplinary integration, mathematical model.*

KIRISH

Zamonaviy nazariy va amaliy fizikani differensial hamda integral hisob apparatisiz tasavvur qilib bo'lmaydi. Biroq, ta'lim metodologiyasida uzoq vaqtdan buyon mavjud bo'lgan muammo — matematikaning mavhum (abstrakt) ramzlar dunyosi bilan fizikaning real, empirik qonuniyatlari o'rtasidagi uzilishdir. O'quvchi va talabalar ko'pincha algebra darslarida $y = f(x)$ funksiyadan hosila olishni shunchaki formal qoidalar zanjiri sifatida yodlaydilar. Fizika darslarida esa kinetik tenglamalar ($v=v_0+at$ yoki $s=s_0+v_0t+\frac{at^2}{2}$) faqatgina tekis va tekis o'zgaruvchan harakatlar uchun cheklangan holda o'rgatiladi. Vaholanki, koinotdagi real harakatlar (raketa dinamikasi, seysmik tebranishlar, aerodinamik oqimlar) nohiziqi va o'zgaruvchan tezlanishli tabiatga ega. Ushbu maqolaning maqsadi — hosila tushunchasini chekli va sodda qoliplardan chiqarib, uni yuqori tartibli differensiallar darajasiga ko'tarish, hosilaning fizik ma'nosini oniy tezlik, tezlanish va hatto tezlanishning o'zgarish sur'ati (og'ish) misolida murakkab amaliy masalalar orqali fundamental va mukammal tarzda asoslab berishdan iborat.

Asosiy qism. Tadqiqotda matematik analizning limitlar nazariyasi, differensial operatorlar va kinematik jarayonlarni nuqtaviy modellashtirish usullaridan foydalanildi. Klassik mexanikada vaqt o'tishi bilan jism koordinatasining o'zgarishi uzluksiz $s = s(t)$ funksiyasi bilan ifodalanadi. Agar vaqt argumenti t dan $t + \Delta t$ gacha o'zgarsa, funksiya

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) \text{ orttirmaga ega bo'ladi.}$$

Ushbu jarayonda o'rtacha tezlik $v_{o'rt} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ nisbat bilan aniqlanib, u faqatgina berilgan vaqt oralig'idagi integral ko'rsatkichni beradi. Tizimning dinamik trayektoriyasini har bir nuqtada mukammal aniqlash uchun vaqt orttirmasi cheksiz kichik miqdorgacha qisqartiriladi, ya'ni $\Delta t \rightarrow 0$ limit sharti kiritiladi. Bu matematik limit differensial hisobda funksiyaning argument bo'yicha birinchi tartibli hosilasi deb ataladi:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = s'(t)$$

Fizik nuqtai nazardan, yo'l funksiyasidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosila oniy tezlikni beradi. Agar harakat davomida tezlik ham o'zgaruvchan bo'lsa, u holda tezlikning vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilasi jismning oniy tezlanishini (a) belgilaydi:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = v'(t)$$

Tezlik $v(t) = \frac{ds}{dt}$ ekanligini hisobga olsak, tezlanish yo'l funksiyasining vaqt bo'yicha ikkinchi tartibli hosilasi ekanligi kelib chiqadi:

$$a(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2s}{dt^2} = s''(t)$$

Agar mexanik tizimda elementar kuchlar vaqtga bog'liq ravishda o'zgarib tursa, tezlanish ham o'zgaruvchan qiymat oladi. Oliy mexanikada tezlanishning vaqt bo'yicha o'zgarish tezligi og'ish (yoki murch - jerk) deb ataladi va j harfi bilan belgilanadi. Bu miqdor yo'l funksiyasining uchinchi tartibli hosilasidir:

$$j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d^3s}{dt^3} = s'''(t)$$

Mavzuni shunchaki nazariy tushuntirish bilan cheklanmay, uni real muhandislik va kinematik masalalar orqali to'liq isbotlaymiz.

1-masala: Nochiziqli murakkab harakat dinamikasi. Moddiy nuqta to'g'ri chiziqli trayektoriya bo'ylab $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 5$ (metr) qonuniyatga muvofiq harakatlanmoqda ($t \geq 0$, soniyalarda). Jismning harakat yo'nalishi nechanchi soniyalarda o'zgarishini aniqlang. Harakat yo'nalishi o'zgargan lahzalardagi jism koordinatalari va uning tezlanishini toping. Jismning tezlanishi nolga teng bo'lgan lahzadagi oniy tezlikni hisoblang.

Yechish. Jism o'z harakat yo'nalishini o'zgartirishi uchun uning oniy tezligi lahzali ravishda nolga teng bo'lishi ($v(t) = 0$) va mos ravishda ishorasini o'zgartirishi kerak. Yo'l funksiyasidan vaqt bo'yicha birinchi tartibli hosila olamiz:

$$v(t) = s'(t) = \left(\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 5 \right)' = t^2 - 6t + 8 \quad (\text{m/s})$$

Tezlikni nolga tenglashtirib, kvadrat tenglamani yechamiz:

$$t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow (t - 2)(t - 4) = 0 \Rightarrow t_1 = 2\text{s}, \quad t_2 = 4\text{s}$$

Demak, jism $t_1 = 2\text{s}$ va $t_2 = 4\text{s}$ lahzalarida to'xtab, harakat yo'nalishini teskarisiga o'zgartirgan.

Ushbu lahzalardagi koordinatalarni topish uchun t_1 va t_2 qiymatlarini dastlabki $s(t)$ funksiyasiga qo'yamiz:

$$s(2) = \frac{1}{3} \cdot (2)^3 - 3 \cdot (2)^2 + 8 \cdot (2) + 5 = \frac{8}{3} - 12 + 16 + 5 = 11.67\text{m}$$

$$s(4) = \frac{1}{3} \cdot (4)^3 - 3 \cdot (4)^2 + 8 \cdot (4) + 5 = \frac{64}{3} - 48 + 32 + 5 = 10.33\text{m}$$

Endi jismning tezlanish funksiyasini topish uchun tezlik funksiyasidan ikkinchi marta hosila (yo'ldan ikkinchi tartibli hosila) olamiz:

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = (t^2 - 6t + 8)' = 2t - 6 \quad (\text{m/s}^2)$$

Ushbu aniqlangan funksiyaga vaqt parametrlarini qo'yib, mos lahzalardagi oniy tezlanishlarni hisoblaymiz:

$$a(2) = 2 \cdot (2) - 6 = -2\text{m/s}^2 \quad (\text{jism tezligini kamaytirmoqda})$$

$$a(4) = 2 \cdot (4) - 6 = +2\text{m/s}^2 \quad (\text{jism tezligini oshirmoqda})$$

Masalaning uchinchi shartiga ko'ra, tezlanish nolga teng bo'lgan vaqtni aniqlaymiz:

$$a(t) = 0 \Rightarrow 2t - 6 = 0 \Rightarrow t = 3\text{s}$$

Ushbu $t = 3\text{ s}$ lahzasini tezlik funksiyasiga qo'yamiz:

$$v(3) = (3)^2 - 6 \cdot (3) + 8 = 9 - 18 + 8 = -1\text{m/s}$$

Ushbu minus ishorasi jismning koordinata o'qiga teskari yo'nalishda 1m/s tezlik bilan harakatlanayotganini bildiradi.

2-masala: O'zgaruvchan kuch va yuqori tartibli hosila (og'ish) tahlili

Massasi $m = 2\text{kg}$ bo'lgan jism to'g'ri chiziqli harakat qilmoqda va uning koordinatasi $s(t) = 2t^3 - 4t^2 + 5(\text{m})$ tenglama bilan berilgan.

Harakat boshlangandan keyin $t = 3\text{s}$ o'tganda jismga ta'sir qilayotgan Nyuton kuchini (F) toping.

Mexanik tizimdagi og'ish (jerk) ko'rsatkichini aniqlang. Nyutonning ikkinchi qonuniga ko'ra, jismga ta'sir qilayotgan kuch $F = m \cdot a$ formula bilan aniqlanadi. Demak, bizga birinchi navbatda tezlanish funksiyasi kerak. Yo'ldan ketma-ket ikki marta hosila olamiz:

$$v(t) = s'(t) = (2t^3 - 4t^2 + 5)' = 6t^2 - 8t \quad (\text{m/s})$$

$$a(t) = s''(t) = (6t^2 - 8t)' = 12t - 8 \quad (\text{m/s}^2)$$

Vaqtning $t = 3\text{s}$ qiymatida oniy tezlanishni hisoblaymiz:

$$a(3) = 12 \cdot (3) - 8 = 36 - 8 = 28\text{m/s}^2$$

Endi jismga ta'sir etayotgan dinamik kuchni topishimiz mumkin:

$$F = m \cdot a(3) = 2\text{kg} \cdot 28\text{m/s}^2 = 56\text{N}$$

Tizimning mexanik barqarorligini tavsiflovchi og'ish (j) miqdorini topish uchun yo'ldan uchinchi tartibli hosila olamiz:

$$j(t) = s'''(t) = a'(t) = (12t - 8)' = 12 \quad (\text{m/s}^3)$$

Bu natija shuni ko'rsatadiki, tizimda tezlanish har soniyada o'zgarimas 12m/s^3 tezlik bilan ortib bormoqda. Bu ko'rsatkich kosmik kemalar va tezyurar poyezdlar konstruksiyasida inson salomatligiga ta'sir qiluvchi yuklanishlarni hisoblashda juda muhim hisoblanadi.

Olingan analitik natijalar shuni ko'rsatadiki, hosila operatori shunchaki funksiya grafigiga o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyenti ($\tan \alpha$) bo'lib qolmay, u real dunyodagi har qanday o'zgarishlar dinamikasining oniy o'lchovidir. Grafiklarning o'zaro munosabati orqali quyidagi qonuniyatlar to'liq tasdiqlandi:

Funksiya tartibi	Matematik ifodasi	Fizik ma'nosi	Geometrik talqini
Boshlang'ich funksiya	$s(t)$	Jismning fazodagi o'rni (Yo'l)	Trayektoriya chizig'i

Funksiya tartibi	Matematik ifodasi	Fizik ma'nosi	Geometrik talqini
Birinchi tartibli hosila	$s'(t) = v(t)$	Oniy tezlik	$s(t)$ grafigiga o'tkazilgan urinmaning burchagi
Ikkinchi tartibli hosila	$s''(t) = a(t)$	Oniy tezlanish	$v(t)$ grafigiga o'tkazilgan urinmaning burchagi
Uchinchi tartibli hosila	$s'''(t) = j(t)$	Og'ish (Tezlanish o'zgarishi)	$a(t)$ grafigining og'ish o'zgarishi

Ushbu konseptual yondashuv ta'lim oluvchilarda "Matematika darsidagi formulalar qayerda ishlatiladi?" degan fundamental savolga eng mukammal javobni beradi. Matematika va fizika fanlarining bunday oliy uchrashuvi o'quvchida tabiat qonuniyatlariga nisbatan uzluksiz va tizimli dunyoqarashni shakllantiradi.

Xulosa o'rnida aytish mumkinki, hosilaning fizik ma'nosini faqatgina oddiy tekis harakatdagi tezlik bilan cheklash uning mohiyatini yetarlicha ochib bera olmaydi.

Mazkur maqolada keltirilgan ko'p tartibli differensial zanjirlar va chiziqli bo'lmagan harakat tenglamalarining yechimlari hosila operatorining cheksiz imkoniyatlarini namoyon etdi.

Ushbu metodologiyani ta'lim jarayonlariga tatbiq etish fundamental fanlar integratsiyasini yangi bosqichga olib chiqadi.

Kelgusida ushbu differensial modelni kimyoviy kinetikadagi reaksiyalar tezligi va iqtisodiyotdagi marjinal rentabellik funksiyalarining yuqori tartibli hosilalari tahlili bilan kengaytirgan holda tadqiq etish tavsiya etiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Alimov, Sh. A., Xaydarov, B. K., & Sidikov, J. S. (2020). Algebra va analiz asoslari: Oliy ta'lim muassasalari va akademik litseylar uchun darslik. Toshkent: O'qituvchi.
2. Landsberg, G. S. (2018). Fizika kursi: Mexanika va kinematika asoslari. Toshkent: Yangi asr avlodi.
3. Stewart, J. (2015). Calculus: Early Transcendentals (8th ed.). Boston: Cengage Learning.
4. Irodov, I. E. (2012). Fizika darslarida umumiy mexanika muammolari. Moskva: Fizmatlit.
5. Fixtengols, G. M. (2015). Differensial va integral hisob kursi (1-jild). Toshkent: O'zbekiston.

6. Tojiyev, Sh. H., & Ismoilov, N. A. (2021). Oliy matematika va undan fizik jarayonlarni modellashtirishda foydalanish. O'quv-uslubiy qo'llanma. Samarqand: SamDU nashriyoti.

7. Xhudayberganov, G., Vorisov, A. K., & Mansurov, X. T. (2018). Matematik analizdan ma'ruzalar (1-qism). Toshkent: Universitet.

8. Sivuxin, D. V. (2014). Umumiy fizika kursi: Mexanika (1-jild). Moskva: Nauka.

9. Thomas, G. B., & Finney, R. L. (2019). Thomas' Calculus (14th ed.). New York: Pearson.

10. Karimov, B. Z., & Olimov, F. M. (2023). Fundamental fanlar integratsiyasi: Matematik analiz va mexanika qonuniyatlarining konseptual sintezi. O'zbekiston Fizika Jurnal, 25(2), 114-122.